Problemas de Palabra en Rusia y América

Conferencia presentada al XVI Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones. IV Encuentro de Aritmética
Santafé de Bogotá, Junio de 2005

Andrei Toom
UFPE, Departamento de Estadística
E-mail toom@ufpe.br, toom@member.ams.org, andretoom@yahoo.com
Web site `http://www.de.ufpe.br/~toom, andretoom.com`
Traducido del Inglés por Fabio Fajardo Molinares – fajardo@cox.de.ufpe.br

Puesto que este texto es sobre problemas de *palabra*, lo primero es definir el tema. Para mantenernos tan cerca como sea posible del significado exacto de las palabras, sugiero que un problema de no palabra es un problema formulado usando únicamente símbolos matemáticos y palabras técnicas como "resuelva la ecuación..." De igual forma, el problema de palabra usa palabras no matemáticas. Ubicándonos en un contexto matemático, estas palabras deben ser interpretadas matemáticamente lo que es una gran contribución al valor, entusiasmo y riesgo de los problemas de palabra.

En el nivel *K-12* no hay lugar para formalismos sofisticados de matemática avanzada, así que los problemas de no palabra, que tratan con formalismos, son ejercicios necesarios pero no emocionantes. No sorprende que la mayoría de los problemas interesantes disponibles en este nivel son problemas de palabra que llevan al salón de clases gran cantidad de imágenes como monedas, botones, tiempo y edad, distancia y velocidad, longitud, amplitud, altura, perímetro, área y volumen, campos, cajas, barriles, planetas, interés y descuento, barcos y corrientes, aviones y viento, bombas y pozos, etc.

Para los niños es una experiencia invaluable discernir las características formales de estas imágenes, que pueden tomadarse en cuenta para resolver el problema. Los problemas que envuelven razón y velocidad podrían ser (y en Rusia son) comunes aun en mitad de escuela. Los trenes, carros y barcos son muy usados en los textos escolares, no porque todos los estudiantes aspiren a trabajar en negocios de transporte, sino por una razón más llamativa: estos objetos son fáciles de imaginar moviéndose a velocidades constantes y por esto son apropiados para relacionar de forma analítica o abstracta la idea de movimiento uniforme, a su vez pueden servir para relacionar la idea de función lineal. Así, podemos mover a los niños más y más en el camino de las relaciones analíticas, esto es, desarrollar su pensamiento abstracto.

Algo igualmente importante, en mi opinión, es que resolviendo problemas de palabra los niños deben comprender y traducir en términos matemáticos una multitud de verbos, adverbios y palabras sintácticas que indican acciones y relaciones entre objetos, tales como *colocar, dar, tomar, llevar, llenar, vaciar, mover, encontrar, alcanzar, más, menos, después, antes, desde, hacia, entre, contra, lejos,* etc. Aunque hablo de "niños", realmente me refiero a un amplio rango de edades, incluyendo los estudiantes de universidad para quienes todo esto podría ser realmente un desafío.[Toom.How]

Tesis Principal. Los problemas de palabra son muy valiosos no solo para maestros de matemáticas, sino también para el desarrollo en general. Los problemas de palabra resueltos con ayudas técnicas mínimas, aun con escolaridad mínima, sin álgebra, algunas veces simplemente con sentido común, son especialmente valiosos. Lo más independiente es la solución, a mayor estimulación de la habilidad del niño en realidades abstractas mayor será su pensamiento creativo y productivo.

George Polya dió gran importancia a los problemas de palabra en la escuela. Escribió:

> **¿Por qué problemas de palabra?** *Espero conmocionar a pocas personas al asegurar que la tarea más importante de la instrucción matemática en la escuela secundaria es enseñar la composición de ecuaciones para resolver problemas de palabra. Hay un argumento fuerte a favor de esta opinión. Al resolver problemas de palabra utilizando ecuaciones, el estudiante traduce la situación real a términos matemáticos; tiene la oportunidad de experimentar que los conceptos matemáticos están relacionados con la realidad, pero estas relaciones deben ser trabajadas cuidadosamente.* [Polya], *pág. 59*

Gusto de la declaración de Polya, pero necesita algunas correcciones. Primero, usualmente es casi imposible llevar objetos reales como barcos o aviones al salón de clases. Tal "situación" que el estudiante traduce no es real, es una situación descrita en un texto preciso cuyo significado encaja en ciertas construcciones sintácticas. Segundo, los niños deben comenzar a resolver problemas de palabra tan temprano como sea posible, aun antes de aprender álgebra. Así, tenemos una clase muy valiosa de **problemas aritméticos de palabra**, diseñados para ser resueltos sin álgebra. El caso de los problemas aritméticos de palabra es aun más desafiante para un teórico educacional pues es más evidente que encaramos la pregunta: ¿en qué traduce el estudiante estas palabras? ¿únicamente en números? En el caso de problemas algebráicos de palabra – ¿traducimos su redacción a ecuaciones y no más? Creo que en ambos casos la respuesta es negativa: además de los números y las ecuaciones hay algunos modelos mentales.

Problemas de Palabra en Rusia

En la escuela rusa siempre fue normal la presencia, es más, la abundancia de problemas de palabra en todos los grados. "Siempre" no significa sólo tiempo soviético, ya era así en el siglo XIX. No recuerdo ningún término especial para los problemas de palabra en mi niñez porque la palabra "problema" usualmente significaba problema de palabra, mientras que los problemas de no palabra eran llamados "ejercicios". Por ejemplo, el título del libro *Berezanskaya* [Berez], que fue usado en los años 1930-1940, dice "problemas y ejercicios de aritmética para grados 5 y 6." Aquí "problemas" significa problemas de palabra, los cuales constituyen la mayoría de las 2354 lecciones del libro.

Por muchas décadas resolver problemas de palabra ha sido y sigue siendo parte regular de la vida de los niños rusos. La dificultad de los problemas crece continuamente de un grado a otro. Esta dificultad tiene varios parámetros, uno de los cuales es el número de operaciones aritméticas o *pasos* necesarios para resolver un problema. Los niños rusos comienzan a resolver problemas de palabra de un paso al final del primer grado, de dos pasos al final del segundo grado, resuelven problemas de tres pasos al final del tercer grado y de cuatro pasos al final del cuarto grado. Todo este tiempo resuelven problemas por medios aritméticos, sin álgebra. La solución puede ser escrita como una serie de preguntas seguidas por operaciones aritméticas que las responden. Finalmente debe ser escrita una respuesta explícita. Este entrenamiento dá fundamentos para resolver problemas más sofisticados en los siguientes grados. En el quinto grado cuando los niños estan familiarizados con los problemas de palabra, el álgebra viene fácilmente y permite resolver más problemas.

El siguiente problema es de un reciente y muy popular libro ruso de problemas para cuarto grado. (Enumero los problemas incluidos en este texto para propósitos de referencia.)

Problema 1. Una librería necesita encuadernar 4500 libros. Una tienda puede encuadernar estos libros en 30 días, otra lo puede hacer en 45 días. ¿Cuántos días son necesarios para encuadernar todos los libros si las dos tiendas trabajan al mismo tiempo? [Moro.4.2], pág. 73

La solución es la siguiente:

¿Cuántos libros puede encuadernar la primera tienda en un día?
4500/30 = 150
¿Cuántos libros puede encuadernar la segunda tienda en un día?
4500/45 = 100
¿Cuántos libros pueden encuadernar las dos tiendas en un día?
150+100=250
¿En cuántos días pueden las dos tiendas encuadernar los libros?
4500/250=18
Respuesta: Las dos tiendas pueden encuadernar los libros en 18 días.

El problema 1 puede ser llamado un problema *derecho* porque puede ser resuelto de manera sencilla simplemente realizando operaciones aritméticas con significados evidentes. Aunque simples, los problemas *derechos* son una etapa indispensable en el desarrollo de la competencia matemática de cualquier niño. Esta etapa, a su vez, consiste en varias etapas con un número creciente de pasos en sus soluciones y cada niño debería pasar esto escalonadamente. Por ejemplo, el problema 1 es de cuatro pasos.

En Singapur encontramos un estilo similar de enseñanza. El siguiente problema es de un libro de escuela de Singapur para sexto grado:

Problema 2. Una persona viajó de la ciudad A a la ciudad B. En 2 horas cubrió la primera mitad del viaje a una velocidad promedio de 75 km/h. Si su velocidad promedio para el viaje completo fue 60 km por hora, encuentre la velocidad promedio de la segunda mitad del viaje [Sing.6A], pág. 90

Este problema también es *derecho*. Puede ser resuelto en cinco pasos así:
La mitad del viaje fue: $2\ h\ \times 75\ km/h\ = 150\ km.$
El total de viaje fue: $2 \times 150\ km = 300\ km.$
El tiempo total fue: $300\ \ km\ \div 60\ \ km/h\ = 5\ h.$
El tiempo gastado en la segunda mitad fue: $5\ h\ - 2\ h\ = 3\ h.$
La velocidad promedio en la segunda mitad fue: $150\ km\ \div 3\ h\ = 50\ km/h.$

Así, los programas de Rusia y Singapur se dan de la mano en estilo y dificultad de problemas aritméticos. Probablemente, ambos países encontraron una buena compensación entre los diferentes requerimientos.

¿Por qué Singapur? Porque mostró excelentes resultados en el TIMSS – Third International Mathematics and Science Study [TIMSS]. Este no fue perfecto y fue justamente criticado. Además, uno de los resultados innegables y más sorprendentes fue el éxito de varios países del Este asiático incluyendo Singapur, Corea y Japón. Además, los textos escolares de Singapur son fáciles de usar porque están en inglés, de ahí que su popularidad está creciendo entre los escolares americanos [Homeschool]. Comparando los libros de Rusia y Singapur, vemos que son similares en varios aspectos, el más importante es que ambos tienen muchos problemas aritméticos de palabra de estilo “tradicional” (sin datos faltantes, excesivos o contradictorios).

El problema 1 es del libro de Moro. Los libros de Moro para la escuela primaria son los más usados en Rusia hoy en día porque son cuidadosamente editados y comparativamente conservativos, similares a los que los profesores han usado. Los libros de Geidman son más avanzados y menos usados. En cifras, cerca del 80% de las escuelas de Moscú usan los libros de Moro y alrededor del 10% usan los de Geidman. Aquí presento algunos problemas de los libros de Geidman para el segundo grado:

Problema 3. Vintik y Shpuntik acordaron encontrarse en el quinto vagón de un tren. Sin embargo, Vintik fue al quinto vagón desde la parte delantera del tren y Shpuntik fue desde la parte trasera. ¿Cuántos vagones debe tener el tren para que se encuentren en el mismo vagón? [Geidman.2.1], pág. 9

Problema 4. Igor y sus dos amigos jugaron ajedrez. Cada uno jugó dos partidas. ¿Cuántas partidas fueron jugadas? [Geidman.2.1], pág. 73

Problema 5. Todos los números del 1 al 99 fueron escritos consecutivamente. ¿Cuantas veces fue escrito el digito 5? [Geidman.2.2], pág. 63

Problema 6. Dos brujas discutían cual vehiculo era más rápida: argamasa o escoba. Volaron, cada una con una, la misma distancia de 288 km. La bruja que iba en argamasa lo hizo en 4 h y la que iba en escoba lo hizo en 3 h. ¿Qué es mayor, la velocidad de argamasa o la velocidad de escoba y cuánto? [Geidman.4.1], pág. 60.

Problema 7. Cuando Ivan Tsarevich fue al Reino Mágico, Koschey tenía la edad de Baba Yaga e Ivan Tsarevich juntos. ¿Cuántos años tenía Ivan Tsarevich cuando Koschey tenía la edad de Baba Yaga en el tiempo que Ivan Tsarevich fue al Reino Mágico?

Defensa de los Problemas Aritméticos de Palabra en Rusia

Los educadores rusos no solo usan problemas aritméticos de palabra, también los defienden de ataques impensados. L. D. Kudriavtsev, educador ruso, escribió:

> *Hay un punto de vista para el que no tiene sentido dar mucha atención a la solución de problemas aritméticos de palabra porque en el futuro ellos serán resueltos de una manera más simple, utilizando ecuaciones algebráicas. La materialización de este punto de vista permitió la reducción del número de horas dedicadas al estudio de la aritmética en el currículo escolar, lo cual disminuyó el nivel de pesamiento lógico de los estudiantes. Esto está conectado al hecho de que la meta principal de resolver problemas aritméticos de palabra es el desarrollo del pensamiento de los niños, su habilidad para hacer conclusiones lógicas y correctas del análisis de los datos dados en el problema y el uso de ellos para resolverlo. La experiencia recolectada en décadas precendentes ha demostrado que el método de desarrollar el pensamiento lógico de los niños resolviendo problemas aritméticos a una cierta edad es totalmente sano, así que parece muy imprudente abandonarlo. Es necesario agregar que nadie ha encontrado o sugerido hasta ahora otro método eficiente para desarrollar el pensamiento lógico de los niños.* [KUDR], *pág. 55*

Estoy de acuerdo con la idea de Kudriavtsev de que los problemas aritméticos de palabra promueven el desarrollo del pensamiento lógico.

El eminente profesor ruso A. V. Shevkin escribió recientemente:

> *Los problemas de palabra siempre tuvieron un lugar especial en la educación matemática de la escuela rusa tradicional, este es un fenómeno casi exclusivo de Rusia, causado parcialmente porque durante un largo período de la historia el conocimiento matemático fue transmitido de una generación a otra como una lista de problemas prácticos con sus soluciones.[...]*
>
> *En mi opinión, los rusos no solo heredaron y desarrollaron la manera antigua de transmitir el conocimiento matemático y formas de argumentar usando problemas de palabra, también aprendieron a usarlos para formar habilidades importantes de aprendizaje que son necesarias para analizar el texto, discernir los datos y la pregunta, diseñar estrategias de solución, proponer preguntas y buscar datos, lo cual puede proporcionar respuestas a ellas y verificar los resultados. Estos procedimientos ayudaron al crecimiento de los estudiantes desarrollando su pensamiento lógico y lenguaje, esto hizo más eficiente su aprendizaje de la matemática y otros temas. Por esta razón los problemas de palabra jugaron un rol importante en el proceso de aprendizaje y les fue dado tanto tiempo en la enseñanza de la matemática en la escuela. Además, resolver problemas de palabra necesita dominio de un amplio rango de habilidades de aprendizaje incluyendo el pensamiento lógico, estas cualidades son importantes para el estudio futuro, son evaluadas en los exámenes de ingreso a la universidad, lo cual incrementa la atención en los problemas de palabra de las escuelas.* [SHEVKIN.A], *pág. 61.*

En un libro reciente Shevkin escribió:

> *En esta etapa (5-6 grados) de la enseñanza de la aritmética de resolución de problemas se tiene una ventaja sobre la etapa algebráica porque el resultado de cada paso simple en una solución por etapas tiene realmente una interpretación evidente y concreta que no vá más allá de la experiencia de los estudiantes. No es accidental que los estudiantes dominen varias formas de argumentación (aun complicadas) y, basados en operaciones imaginarias con cantidades conocidas lleguen a respuestas más rápido y mejor que de la forma basada en una ecuación para problemas iguales con diferentes situaciones aritméticas.* [SHEVKIN.T], *pág. 10.*

Tradicionalmente, los problemas de palabra no fueron mencionados en los estándares educacionales rusos pues su presencia parecía evidente. Sin embargo, como hubo dudas en años recientes, muchos educadores y matemáticos se aseguraron de que la siguiente frase fuera incluida en los actuales Estándares Federales Rusos de la educación pública matemática:

> *Solucionar problemas de palabra por medios aritméticos (usando esquemas, tablas, registros cortos y otros modelos).*
> [RUS.FED], PÁG. 41

Estos educadores rusos, con quienes me he comunicado, aun critican los estándares federales rusos por varios defectos, y los entiendo, pero aun con todas sus imperfecciones, los estándares rusos son enormemente mejores que los americanos. Los estándares rusos son listas de tópicos, llamados despectivamente por los profesores americanos como "listas de lavanderia". ¿Qué presentan los educadores americanos como estándares?, ya veremos.

Hallar dos números dadas su suma y diferencia

Esta es una clase de problema muy específica pero útil. Idealmente, cada niño a cierta edad debe comprender cómo resolver tales problemas, mientras más independientemente, mejor. Cuando yo estaba en el cuarto grado (10 años de edad) resolvíamos el siguiente problema (no recuerdo los números exactos):

Problema 8. Un avión tiene dos tanques de gasolina. La cantidad total de gasolina en ambos tanques es de 24 litros. El primer tanque contiene 4 litros más que el segundo. ¿Cuanta gasolina hay en cada tanque?

Un problema similar está incluido en un libro ruso moderno, también para cuarto grado:

Problema 9. Un antiguo artista dibujó escenas de caza en las paredes de una caverna, incluyendo 43 figuras de animales y personas. Había 17 figuras más de animales que de personas. ¿Cuantas figuras de personas dibujó el artista? [GEIDMAN.4.1], pág. 11

Un problema similar está incluido en un libro para quinto grado en Singapur:

Problema 10. Raju y Samy repartieron $410 entre ellos. Raju recibió $100 más que Samy. ¿Cuánto dinero recibió Samy? [SING.5A], pág. 23

El problema es resuelto con ayudas visuales: hay dos barras horizontales llamadas Raju and Samy, los datos se observan claramente en este dibujo. Además, hay una niña de cuya cabeza aparece un pensamiento en una nube diciendo: "Dar a Raju $100 primero y dividir el dinero restante en dos unidades."

En Japón son resueltos problemas similares sin álgebra, también en cuarto grado, de acuerdo con el "The Learning Gap" de Stevenson y Stigler [GAP:L]. En la página 187 describen a un maestro japonés explicando el siguente problema para estudiantes de cuarto grado:

Problema 11. Hay un total de 38 niños en clase. Hay 6 niños más que niñas. ¿Cuántos niños y cuántas niñas hay?

Según Stevenson y Stigler "su solución generalmente no es pensada en USA hasta que los estudiantes toman un curso de álgebra" y escriben en la página siguiente:

> *Con esta representación visual concreta [...] y una guía cuidadosa del profesor, los niños, aun de cuarto grado, son capaces de entender el problema y su solución.*

La frase "hasta que los estudiantes toman un curso de álgebra" realmente significa "hasta 8 o 9 grado". Por ejemplo, veamos este estudio reciente:

> *Este estudio examinó el acceso temprano al álgebra en un grande distrito escolar urbano/suburbano que daba instrucción en álgebra a algunos estudiantes de octavo grado. El análisis de datos exploró las diferencias en los logros de álgebra y los antecedentes de los dos grupos, es decir, aquellos quienes estudiaron álgebra en octavo grado versus aquellos que la estudiaron en noveno grado. El análisis no consiguió identificar a los estudiantes en los grupos separados. La pertenencia a un grupo no garantiza mayores logros pero sí refuerza los patrones de logros existentes. Los resultados de este estudio apoyan políticas que promueven la igualdad para ofrecer álgebra a todos los estudiantes de octavo grado.* [AERA2004]

Hallar dos números dadas su suma y su razón

En Rusia tales problemas son llamados "problemas en partes" porque pueden ser resueltos sin álgebra pero introduciendo "partes" de ella. Estos problemas son tan comunes que el conocido escritor Nosov describió uno de ellos en su libro "Vitya Maleev en la Escuela y la Casa". El protagonista, Vitya Maleev, finalizó el tercer grado reprobando matemáticas y prometió a su profesora resolver problemas por sí mismo para recuperar la materia. Así que intenta resolver el siguiente problema del libro de tercer grado:

Problema 12. Un niño y una niña recolectaron 24 nueces. El niño recolectó dos veces más nueces que la niña. ¿Cuántas recolectó cada uno?

Primero, Vitya divide 24 por 2 y obtiene 12. ¿Podría cada uno haber recolectado 12 nueces? No, el niño recogió más que la niña. Ahora, sin sabiendo qué hacer, Vitya dibuja a un niño y una niña, para expresar que el niño recolectó dos veces más que la niña, dibuja dos bolsillos en los pantalones del niño y uno en el delantal de la niña. Entonces observa el dibujo y vé *tres bolsillos.* Entonces una idea, "como una iluminación", viene a su cabeza: las nueces deben colocarse en estos bolsillos, entonces debe dividir el número de nueces entre el número de bolsillos!. Así obtiene $24/3 = 8$, entonces cada bolsillo contiene 8 nueces; esto es cuanto tiene la niña. El niño tiene dos bolsillos así que tiene 8 veces 2, lo cual dá 16. Ahora Vitya puede verificar su respuesta: suma 8 y 16 y obtiene 24, entonces prueba que su respuesta es correcta, está muy emocionado. Probablemente es la primera vez en su vida que resuelve un problema él mismo. Vá a la calle a contárselo a todo el mundo y una vecina le dice: "este problema es de tercer grado, nosotros lo resolvimos el año pasado." Esto no desanima a Vitya, lo cual está bien: ha hecho un descubrimiento.

Problemas que necesitan una unidad *ad hoc*

Recordemos el problema 1 para cuarto grado: *Una libreria necesita encuadernar 4500 libros. Una tienda puede encuadernarlos en 30 días, otra lo puede hacer en 45 días. ¿Cuántos días se necesitan para hacer el trabajo si las dos tiendas trabajan al tiempo?*

Sin embargo, este problema puede ser resuelto sin conocimiento del número de libros, es más, no se necesita conocer el tipo de trabajo. Es suficiente con saber que la primera tienda puede hacer $1/30$ del trabajo en un día y que la otra tienda puede hacer $1/45$ del trabajo en un día. Por tanto, trabajando las dos, pueden hacer esta parte del trabajo en un día:

$$\frac{1}{30}+\frac{1}{45}=\frac{3}{90}+\frac{2}{90}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}.$$

Así que necesitan 18 días para hacer el trabajo.

Encontré un problema similar en otro libro para cuarto grado. Es más fácil, así que puede servir como una introducción a los “problemas de trabajo”.

Problema 13. Deniska puede comer un frasco de mermelada en 6 minutos. Mishka puede comer un frasco similar dos veces más rápido. ¿En cuánto tiempo comerán un frasco de mermelada juntos? [Geidman.4.1], pág. 34.

Densika y Mishka son versiones coloquiales de nombres rusos, lo cual encaja en el estilo jocoso de este problema.

Permítanme presentar otros cuantos problemas históricos de los libros escolares rusos para los grados sexto a octavo (12 a 14 años). El siguiente problema es muy útil para resolver primero por partes, sin álgebra y después resolverlo de nuevo, usando álgebra.

Problema 14. Un antiguo problema. Un ganso encontró una bandada de gansos en el aire y dijo: "Hola, centena de gansos!." El lider de la bandada le contestó: "No hay un ciento de nosotros. Si hubiera tantos de nosotros como hay y tantos mas y la mitad más y un cuarto más y tu también volaras con nosotros, entonces podría haber un ciento de nosotros." ¿Cuántos gansos había en la bandada?

Problema 15. (Problema histórico.) Un hombre nadaba río arriba en el Río Neva. Cerca al Puente Republicano perdió un envase, después de 20 minutos notó la pérdida y se devolvió para encontrar el envase; lo alcanzó cerca al Puente Leughtenant Schmidt. Hallar la velocidad de la corriente del río si la distancia entre estos dos puentes es de 2km. [Larichev], pág. 208.

Este problema muestra el poder de la idea física de movimiento relativo. Pongámonos en el sistema coordenado moviéndose con la corriente. En este sistema el envase no se mueve cuando se pierde mientras que el nadador primero se aleja de él y después retorna. Su velocidad propia se asume constante, así que gasta el mismo tiempo nadando en las dos direcciones. Luego, si toma 20 minutos nadando en una dirección, también los toma nadando en la otra, entonces el tiempo total desde que el envase se pierde es de 40 minutos. Ahora retornamos al sistema coordenado donde estábamos antes y notamos que el envase tomó 40 minutos en moverse de un puente al otro, esto es, 2km. Así que la velocidad de la corriente es 2km dividido por $2/3$ de hora, lo cual dá 3km/h.

El siguiente problema se propuso para ser resuelto sin álgebra.

Problema 16. Tres números suman 90. Diez veces el primer número es igual a quince veces el segundo número e igual a cinco veces el tercer número. Hallar los números [Berez], pág. 267.

Este es un problema de palabra (ligeramente modificado) con contenido geométrico, incluido en uno de los libros de Perelman:

Problema 17. Un hombre vendía leña, para hacer porciones estándar siempre usaba la misma soga, rodeaba un grupo de troncos y los llevaba a las casas en su espalda. Una mujer le solicitó llevar una porción doble de leña. El hombre procedió como siempre, solo que tomó una soga una vez y media más larga que lo usual. La mujer reclamó "Como yo le pagué el doble, usted debió usar una soga con el doble de tamaño." El hombre replicó: "Está equivocada señora, de hecho, le traje un poco más de leña de la que solicitó". ¿quién está en lo correcto? [Perelman.P], pág. 27

Para resolver este problema hacemos, como es usual, supuestos simples. Asumimos que la leña rodeada por la soga es un cilindro cuya altura es la longitud de los troncos y la circunferencia de la base es la longitud de la cuerda. Como la altura del cilindro es constante, el volumen del cilindro es proporcional al área de la base, que es proporcional a el cuadrado de la circunferencia. Así, si la longitud de la cuerda es multiplicada por $3/2$, la cantidad de leña es multiplicada por el cuadrado de esta cantidad, es decir $9/4$, que en realidad es un poco más de 2. Entonces el hombre está en lo correcto.

Problema 18. PROBLEMA DE ARNOLD [ARNOLD]. Dos ancianas comenzaron a caminar, a velocidad constante, cuando salió el sol. Una fue de A a B y la otra de B a A, se encontraron al medio día y, continuando sin parar, llegaron a B a las 4 p.m. y a A a las 9 p.m. respectivamente. ¿A qué hora fue la puesta de sol ese día?

Para resolver este problema, se debe primero dibujar un diagrama con la distancia desde A y el tiempo como coordenadas y se usa la semejanza de triángulos. Vladimir Arnold, famoso matemático, enfatiza que resolver este problema independientemente cuando el tenía 12 años fue su *revelación* y *sensación de descubrimiento* para describir su experiencia y dice que en Rusia su experiencia fue usual.

El siguiente problema tiene más de cien años. Perelman lo llama *problema de Tolstoi* porque le gustaba a León Tolstoi, el famoso escritor ruso que estuvo muy interesado en la educación pública. Este problema también puede ser resuelto sin álgebra, una representación visual puede ser de ayuda.

Problema 19. Un grupo de segadores debía segar dos praderas, una dos veces mayor que la otra. El grupo gasta medio día segando la pradera más grande, después el grupo se divide y la mitad de ellos permanece en la pradera grande finalizando el trabajo por la noche. La otra mitad del grupo trabaja en la parcela más pequeña pero no termina en ese día. La parte restante fue segada por un trabajador en un día. ¿Cuántos segadores había? [PERELMAN.A], pág. 39

Problemas de palabra en olimpiadas: cosas de escuela

Durante mis años de estudiante participé en la organización de olimpiadas matemáticas. Los profesores de la escuela todo el tiempo nos reprochaban por usar problemas muy difíciles. Sin embargo, el espacio entre la escuela y las olimpiadas no siempre fue profundo. De hecho, los problemas más difíciles de los libros de la escuela eran parecidos a los problemas más fáciles de las olimpiadas. Este es un ejemplo: problema puesto en la primera ronda para 9 grado de la Olimpiada Matemática de Moscú en 1963.

Problema 20. Dado un rectángulo cuya relación de lados es 9:16. ¿Es posible inscribir en este, otro rectángulo cuyos lados estén en relación 4:7, de tal forma que cada lado del primero contenga un vértice del segundo?

La respuesta es negativa, esto puede probarse por contradicción. Asumamos que esto es así, debido a la semejanza de triángulos podemos denotar las partes de los lados del rectángulo mayor por $4x, 7y, 4y, 7x$. Entonces observamos que:

$$4x + 7y : 4y + 7x = 9 : 16,$$

lo cual es imposible, puesto que x y y deben ser positivos. Apenas cerca de la mitad de los estudiantes que pasaron la primera ronda resolvieron este problema. Como es usual, se explicaron las soluciones a los problemas de cada etapa en un gran auditorio, en esta ocasión yo presenté las soluciones. El auditorio más grande de la Universidad de Moscú estaba lleno, cerca de 500 jóvenes presumidos que pensaban que los libros de la escuela eran desalentadoramente triviales para ellos, se sorprendieron cuando cité un problema similar al del libro de la escuela. Solo los números eran diferentes, así que el problema de la escuela tuvo una respuesta positiva.

El siguiente problema apareció primero en un libro de Perelman, después en la Olimpiada Matemática de Moscú de 1940 y unos pocos años después fue incluido en un libro de escuela para grados quinto y sexto:

Problema 21. Un bote, viajando río abajo, hizo una distancia entre dos puertos en 6 horas y retornó en 8 horas. ¿Cuánto tiempo necesita una balsa para hacer esta distancia río abajo? [Berez], pág. 246

Hay muchas colecciones de problemas interesantes en Rusia, no todas has sido traducidas a otros idiomas. Este problema es de un libro traducido:

Problema 22. El alumno de cuarto grado Kolya Sinichkin quiere mover un caballero desde la esquina inferior izquierda del tablero de ajedrez (a1) a la esquina superior derecha (h8), pasando una vez por cada cuadro en la ruta. ¿Puede hacerlo? [Kordem], pág. 48

Este problema es de un libro que nunca ha sido traducido:

Problema 23. Tres amigos jugaron ajedrez de modo que cada par de ellos tuvo el mismo número de partidas. Después de esto, ellos discutieron quien era el ganador. El primero dijo: gané más partidas que cada uno de ustedes; el segundo dijo: perdí menos partidas que cada uno de ustedes y el tercero no dijo nada, pero cuando se contaron los puntos encontraron que él había ganado más puntos que cada uno de los otros. ¿Esto es posible? (Una victoria dá un punto, un empate dá medio punto y una derrota no dá nada.) [VGRT], pág. 106

Problemas de palabra en las Olimpiadas: cosas avanzadas

Por un lado los problemas de olimpiadas crecieron fuera de los temas de la escuela, por otro lado bordeando la matemática universitaria. Si usted quiere introducir a los niños en teoría de grafos no necesita comenzar con terminología y definiciones incómodas. En cambio, puede darles el siguiente problema:

Problema 24. $2n$ caballeros vinieron a la corte del Rey Arturo, cada uno con no más de $n-1$ enemigos entre los otros. Probar que Merlin (el consejero de Arturo) puede ubicar a los caballeros en una mesa redonda de forma que ninguno estará al lado de su enemigo. [GT], pág. 89

Este problema fue propuesto para la 27a. Olimipiada Matemática de Moscú, pero no era apropiado en su forma original: *Una gráfica tiene $2n$ vértices, cada uno siendo incidente con al menos n bordes. Probar que esta gráfica tiene ciclo hamiltoniano.*

Yo propuse representar el ciclo hamiltoniano por la legendaria mesa redonda, y de esta forma el problema fue aceptado. Después fue representado en círculos matemáticos donde los caballeros eran representados por los círculos y las relaciones de amistad por lineas que los conectaban. Esta discusión de un problema gracioso suavemente se transformó en un estudio de teoría de grafos, la cual no fue trivial desde un principio.

Parte II. Problemas de palabra en América

En USA la situación con los problemas de palabra (también llamados problemas verbales o problemas de historias), especialmente problemas aritméticos de palabras es peor que en Rusia. La palabra "aritmética" es evitada por algunos educadores americanos porque temen parecer provincianos. Por supuesto, este temor es el que los hace aun más provincianos.

La mayoría de las matemáticas estudiadas en las escuelas públicas promedio de América son repetición de lo que se estudió en la escuela primaria y esto no es gran cosa. Es tí pico en los educadores americanos clasificar los problemas de palabra en cuatro categorías: problemas de adición, problemas de sustracción, problemas de multiplicación y problemas de división. Por supuesto, solo los problemas de un paso ajustan en esta clasificación, así que ninguno de los otros tiene lugar de existir y casi nadie se molesta por esto.

En vez de ser cuidadosos sobre los problemas de palabra, les aplican varios términos peyorativos. Thorndike los llamó *falsos* [THORNDIKE], Kline los llamó *inutilmente artificiales* [KLINE], Usiskin los llamó *engañosos* [USISKIN.NOT], Los "Criterios" los llamaron *"por tipo"* [ST.1]. Hay una caricatura en la serie Far Side llamada "Librería del Infierno" que muestra una librería llena de libros de problemas de historias.

Más tarde Liping Ma, ya famosa debido a su libro "Conociendo y Enseñando Matemáticas Elementales" [MA.BOOK], realizó una discusión pública [MA.TALK], con un título polémico:

La Aritmética en la Educación Americana de la Matemática: un Área Abandonada?

En esta, Ma demandó

> *En la educación americana de la matemática elemental, la* **aritmética** *es vista como insignificante, algunas veces aun con compasión y lástima– como Cenicienta en casa de su madrastra. [...] Desde mi perspectiva, sin embargo, hay potenciales significativos de la aritmética en la educación matemática que son supervisados en este país.*

Entonces Ma presentó varios problemas simples de palabra incluyendo lo siguiente de un libro ruso para tercer grado:

Problema 25. 2 televisores y 4 radios fueron adquiridos por un centro turístico. Se pagaron 756 rublos por cada uno. El precio de un televisor es 270 rublos, ¿Cuánto costaron los radios?

De acuerdo con Ma, este problema debe ser resuelto usando la "expresión matemática":

$$(756 - 270 \times 2) \div 4 =$$

Sin embargo, este estilo de solución es posible solo para problemas derechos. Los niños de las escuelas rusas resuelven también problemas no derechos. Aun así, los problemas derechos pueden ser un gran avance para las escuelas medias y elementales americanas. Finalmente, Ma exclamó:

> *¿Como fue que el campo de la aritmética, como se enseño en otros países, se abandonó en USA y por qué? Creo que debe haber algunas razones positivas que hicieron que esto sucediera. Sin embargo, deben ser conducidas serias reflexiones sobre este tópico.*

Liping Ma está en lo correcto, puedo confirmarlo por experiencia personal. En 1990 nuestra familia se trasladó de Rusia a América. Mi hija siempre estuvo interesada en el arte más que en la ciencia pero nunca se asustó con la matemática y fácilmente cumplió con el programa de escuela en Rusia. Este programa incluyó muchos problemas de palabra de varios pasos, los cuales no encontró especialmente difíciles. Comenzó a asistir a la escuela media americana cuando tenía 12 años de edad. Había tres grupos en matemática –bajo, medio y avanzado, ella fue ubicada en el medio; inmediatamente notó que todos los problemas que resolvía eran de un paso. Peor aun: la profesora explicaba cómo hacer una operación aritmética y entonces resolvían problemas con esta operación. Mi hija solicitó cambio al grupo más avanzado pero no lo logró por causa de su poco inglés, varios meses después fue a este grupo y también los problemas eran de un paso. La única diferencia entre los grupos fue la siguiente: en el grupo medio resolvían problemas de un paso en el sentido usual, en el grupo bajo se daban problemas con respuestas y los niños tenían que verificarlos y en el grupo avanzado se daban preguntas incompletas y ellos tenían que hacer preguntas y responderlas. Concluyo de esto que la escuela simplemente no tenía currículo, ni libros de texto ni tradición para seguir a un grupo realmente avanzado, ni de los profesores tampoco.

Mi hijo, cuatro años mayor que mi hija, quedó muy sorprendido porque había un curso llamado “pre-álgebra” en las escuelas americanas. En Rusia nadie oyó nunca hablar de esto: el álgebra es considerada suficientemente fácil para manejarla sin tal curso. Obtuvo el GED (Diploma de Educación General) y comenzó a tomar cursos superiores. Ahora trabaja como programador de computadora.

La Ignorancia de los Profesores Americanos de Matemáticas

Por muchos años la ignorancia de los profesores americanos fue el secreto de Polichinel: Todos lo sabían pero nadie hablaba. Solo recientemente fue posible hablar sobre esto en voz alta. No comento el famoso libro de Liping Ma [MA.BOOK] porque ya es bien conocido. Miremos el artículo publicado posteriormente por Patricia Clark Kenschaft en *Notices of AMS* [KENSCH]. El artículo está lleno de ejemplos que abren los ojos, este es uno de ellos (pág. 209): En 1986 Kenschaft visitó una escuela primaria K-6 y descubrió que *ni un solo profesor* sabía como hallar el área de un rectángulo:

> *"¿Cual es el área de un rectángulo con x altura y y base?" pregunté. [...] "$x + y$?" dijeron dos adelante simultáneamente. [...] Después todos los 50 gritaron, "$x + y$."*

Aunque el tema principal de Kenschaft es la educación de los niños negros, observa que el conocimiento matemático de los profesores de escuelas con mayoría de estudiantes blancos tambien es pobre (pág. 210):

> *Mi primera vez en un quinto grado en uno de los distritos más afluentes de New Jersey (blanco, por supuesto), pregunté dónde estaba un tercio en la recta real. Después de un momento de silencio, el profesor dijo "cerca a tres, ¿no?". Los niños pronto entendieron la respuesta correcta, venían de hogares donde tales cosas se discutían. Mirando los distritos del más pobre al más rico en el Estado me convencí que el conocimiento matemático de los profesores era patético en ambos.*

Mensajes enviados al e-mail de una lista de discusión de enseñanza matemática:

> ERIC L. GREEN: *Alguien preguntó por qué los problemas de palabra eran tan raros en los libros de matemática. La razón podría ser obvia – asustan a los profesores de la escuela primaria a morte. ¿Por qué piensa que discutimos en las "palabras claves"? esto es precisamente un dispositivo que los profesores de escuela primaria usan para asegurar el éxito, es decir, eliminar la necesidad de los niños de pensar. [...] he notado que muchos profesores de escuela evitan los problemas de palabra por la misma razón – para evitar la frustración. En este caso, los niños han sido entrenados por años para ver la matemática como un conjunto de algoritmos que resuelven problemas particulares.*

> LYNN NORDSTROM: *Como profesor de primaria que trabajó con otros colegas de escuela primaria y media, concuerdo con Eric en que los problemas de palabra "asustan a los profesores a morte" y frustran a los estudiantes. En mis discusiones con profesores encuentro que muchos de ellos se sienten así porque no se sienten preparados para enseñar matemáticas.*

> MARK PRINISKI: *Ooooh... ¡Problemas de palabra! ¿Por qué no hay más de ellos en el texto? Aquí hay una historia del pasado... El primer año que enseñé álgebra (hace 17 años) me dirigí a mi jefe de departamento y me dijo que el resto del departamento de matemáticas había saltado los problemas de palabra porque eran muy difíciles para los estudiantes. (Me gustaría que algunos de mis estudiantes tomaran este consejo:)*

El 10 de Mayo de 1994 Lynn Nordstrom envió a la lista esta broma (cuyo autor es desconocido):

"Guía equivocada de los estudiantes para resolver problemas":

Regla 1: Si es posible, evite leer el problema. La lectura del problema solo consume tiempo y causa confusión.

Regla 2: Extraiga los números del problema en el orden en que aparecen. Esté pendiente de mirar los números que están escritos en palabras.

Regla 3: Si la regla 2 tiene tres o más números, lo mejor es sumarlos.

Regla 4: Si hay solo 2 números que son aproximadamente la misma cantidad, entonces la resta debe dar los mejores resultados.

Regla 5: Si hay solo dos números y uno es mucho menor que el otro, entonces divídalo si es posible – de otro modo, multiplique.

Regla 6: Si el problema parece necesitar de una fórmula, tome una fórmula que tenga suficientes letras para usar todos los números dados en el problema.

Regla 7: Si las reglas 1-6 no parecen funcionar, haga un último intento desesperado. Tome el conjunto de números encontrados por la regla 2 y llene dos páginas de operaciones aleatorias usando estos números. Resalte alrededor de cinco o seis respuestas en cada página, solo en uno de estos casos parece estar la respuesta. Usted puede obtener una nota parcial por haberlo intentado.

Aunque esta es una broma, lamentablemente es muy cercana a la realidad.

¿Los niños deben resolver problemas sin solución?

¿Que pasa con los problemas de información inadecuada, que los "Criterios" americanos llaman "mundo real" y recomiendan fuertemente?, últimamente atraen mucha atención en Europa pero en un sentido muy diferente. Tomemos el famoso problema después del cual Stella Baruk nombró a su libro *"L'âge du capitaine"*:

Problema 26. Hay 26 ovejas y 10 cabras en un barco. ¿Cuántos años tiene el capitán? [Baruk], pág. 25

Este problema fue dado a finales de los 70's a 97 alumnos de segundo y tercero de primaria en Francia: 76 presentaron una respuesta numérica obtenida manipulando los números dados. Por ejemplo, algunos sumaron y contestaron que el capitán tenía 36 años. En su interesante artículo [Selter], Christoph Selter menciona el problema 26 y después describe varios experimentos del mismo tipo hechos por él mismo y sus colegas. Ewa Puchalska y Zbigniew Semandeni [PS] reportan resultados similares, sugieren usar la abreviación MSCD (Datos Perdidos, Excesivos o Contradictorios – siglas en inglés) para estos problemas y discuten cómo usarlos sin frustrar a los niños.

Todos estos educadores creen claramente que tales problemas son inusuales. No llaman a estos del "mundo real" y no les alegra que los niños esperen resolverlos. Por el contrario, les molesta la buena voluntad de los niños con los datos, lo cual no determina una respuesta. Si recomiendan usar tales problemas en la escuela es para entrenar a los niños en rehusar resolverlos. Quieren que los niños sean críticos y rehusen contestar preguntas si no pueden ser obtenidas respuestas de una forma racional. ¿Están de acuerdo con eso? **Vamos al enfoque opuesto.**

PISA (Programa para la Valoración Internacional de los Estudiantes) contiene reveladores ejemplos del enfoque opuesto.

Bastiaan J. Braams [Braams] escribió sobre un ítem del PISA [PISA.Br]:

> *Las preguntas [...] se refieren a un gráfico de tres formas en el plano. Las formas son etiquetadas (A), (B) y (C). La figura B es parecida a un círculo. Las figuras A y C parecen calamares o manchas de tinta: cada uno tiene un borde dentado con cantidades de salidas y su tamaño total (diámetro) hace parecer que cualquiera podría ajustar dentro del círculo, figura B.*
>
> *Pregunta 5: Formas. ¿Cual de las figuras tiene la mayor área? Explicar la respuesta.*
>
> *Puntuación para la Pregunta 5*
>
> *Puntuación 1: Responde lo que indica la forma B, apoyada en un razonamiento convincente, por ejemplo:*
> • *"B. Esta no tiene salidas lo cual disminuye el área. A y C tienen huecos."*
> • *"B, porque es un círculo completo y las otras son como un círculo con pedazos quitados."*
>
> *Puntaje 0: [...] "El círculo. Es obvio."*

En mi opinión este punto no es matemático, es un experimento psicológico. La respuesta "El círculo. Es obvio." es la más apropiada porque la pregunta dirigía la percepción visual del individuo, lo cual no es racional. La solicitud "Explicar la respuesta" es imposible de cumplir de forma responsable, al menos por niños no entrenados.

Otra crítica del PISA fue hecha por V. A. Vassiliev y publicada en *Notices of AMS*[Vassiliev]. Vassiliev cita tres clases de problemas [PISA.Vas]. La tarea matemática usual “Resuelva la ecuación...” se coloca en la primera clase, la más baja. Una pregunta más vaga es colocada en la segunda clase, pero el éxito del show es un punto de la tercera clase, la más alta:

> *En un cierto país, el presupuesto nacional de defensa es $30 millones para 1980 . El presupuesto total para ese año es $500 millones. El siguiente año el presupuesto es de $35 millones, mientras que el presupuesto total es de $605 millones. La inflación durante el período cubierto por los dos presupuestos sumó 10 por ciento.*
>
> *a) Usted es invitado a dar una conferencia en una sociedad pacifista y debe intentar explicar que el presupuesto de defensa disminuyó en este período. Explique como lo haría.*
>
> *b) Usted es invitado a dar una conferencia en una academia militar y debe intentar explicar que el presupuesto de defensa disminuyó durante este período. Explique como lo haría.*

También busqué materiales del PISA y me disgusté con la mayoría de ellos, pero Vassiliev los encontró realmente una perla. La tarea citada es escencialmente un lapsus Froidiano. Muestra la inmoralidad de los organizadores del PISA. Realmente comparto el enojo de Vassiliev.

Puede parecer una contradicción, pero los problemas de palabra tienen reputación de ser al mismo tiempo aburridos y triviales. Los siguientes argumentos fueron hechos en listas de e-mail.

> MARK SAUL, UN FAMOSO PROFESOR: *"En la estatal de New York tenemos pruebas que los niños deben tomar al final de ciertos cursos. Por años, estos problemas fueron primordiales en las pruebas. Para tener buenas notas y para que el profesor pareciera bueno, se publicaron libros revisados que daban métodos específicos para resolver estos problemas. Por ejemplo, en un problema "río arribarío abajo", se tiene un arreglo de cajas 2x3 (distancia, razón, tiempo en cruzar hasta arriba; longitud del lado río arriba y río abajo). Los estudiantes tenían que memorizar las etiquetas para las cajas [...] "*

> RALPH A. RAIMI, UNO DE LOS AUTORES DE LOS REPORTES FORDHAM [FORDHAM.RB]: *En 1937 yo estaba en noveno grado y aprendí problemas de palabra, "problemas de historias" como los llamaban. Mi profesor no tenía la más mínima idea de que las matemáticas fueran escritas o pensadas en inglés y creía que los problemas de historia eran como verbos regulares en francés. Ellos venían en cuatro clases, cada uno con su propio final [...]*

> JUDITH ROITMAN, UNA DE LOS AUTORES DE [PSSM]: *El curso de álgebra de escuela superior que tomé (con honores, también) no fue nada pero impuso los gráficos y los algoritmos. Yo estaba aburrido, aburrido, aburrido y si cualquiera me hubiera sugerido formarme como matemático, me habría reído de ellos."*

JOSEPH G. ROSENSTEIN, UNO DE LOS AUTORES DE LAS NORMAS DE LA ESTATAL DE NEW JERSEY: *Aunque los matemáticos respondemos positivamente a la categoría de "problemas de palabra", muchos profesores y estudiantes reaccionan de formas muy diferentes a esta frase. En el mundo de la educación los "problemas de palabra" han llegado a significar problemas repetitivos, estilizados e irrelevantes que pueden ser resueltos usando métodos mecánicos y frecuentemente memorizados. Consecuentemente, nuestro objetivo es que los estudiantes y los profesores resuelvan "problemas de palabra", necesitamos usar diferentes frases o encontrar caminos para reducir la distancia entre las diferentes formas en que una frase es entendida.*

Creo que la razón para que esto parezca una contradicción es que los problemas de palabra tienen un potencial enorme de variabilidad y exactamente por esta razón son reducidos frecuentemente a unos pocos tipos que pueden ser resueltos mecánicamente. Esto se hace en América pero no en Rusia, donde la *cantidad* de problemas de palabra para resolver es simplemente muy grande para reducirla a clases, así que nadie ha intentado hacer esto.

Ahora vamos a mirar los criterios de la educación matemática americana con especial atención en los problemas de palabra.

Primero observamos los **criterios estatales**. La Fundación Fordham ha ganado un nombre en la educación matemática publicando fuertes pero bien infundadas críticas de los criterios estatales de educación matemática. El último número de la revista, escrito por David Klein y varios colaboradores, apareció en Enero de 2005 [FORDHAM.KLEIN].

Según este reporte solo California, Indiana y Massachusetts recibieron A, esto es "excelente". Alabama, Nuevo México y Georgia recibieron B. Otros 45 estados recibieron C – 15 estados, D – 19 estados y F – 11 estados. Estas bajas calificaciones muestran el aislamiento en que muchos educadores americanos se encuentran. En la mayor super-potencia del mundo, con cientos de universidades, los jefes estatales de la educación matemática no encuentran a nadie para ayudarles a escribir algo más decente. No sorprende que el reporte diga: *"La ignorancia matemática entre los escritores de los criterios es el mayor impedimento para mejorar."* (pág. 24)

Concentrémonos en nuestro tema: Problemas de palabra. En la pág. 11 de la sección "Razonamiento Matemático y Resolución de Problemas" del reporte Fordham se lee:

> *La resolución de problemas es indispensable en el aprendizaje de la matemática e idealmente los problemas prácticos y sencillos deberían dar gradualmente vía a problemas más difíciles para aumentar las habilidades de los estudiantes. Los niños deberían resolver problemas de palabra de un paso en los primeros cursos y tratar con problemas de múltiples pasos que incrementan la dificultad. Por desgracia pocos estados ofrecen criterios que guían el desarrollo de solución de problemas de forma completa. El razonamiento matemático debe ser parte integral del contenido de todos los cursos. Muchos estados fallan en el desarrollo de prerrequisitos al introducir tópicos avanzados como el cálculo. Esto degrada los criterios de la matemática en lo que podría ser llamado "apreciación matemática".*

La atención dada a modelos de estándares estatales bordea la obsesión. En un documento típico se solicita a los estudiantes, en un amplio rango de grados, crear, identificar, examinar, describir, extender y encontrar "la regla" para patrones repetitivos, que crecen y decrecen, así como en patrones que pueden ser encontrados en números, formas, tablas y gráficas. [...] El siguiente modelo de cuarto grado en Dakota del Sur es ejemplo de una falsa doctrina (noción explicada en mayor detalle en la página 34) que es representativa de modelos en muchos otros documentos estatales.

Los estudiantes son capaces de resolver problemas que incluyen identificación y conclusión de modelos. Ejemplo: ¿Cuáles son los dos números que siguen en la secuencia? Secuencia...

Entonces se dá la secuencia "$1, 3, 7, 13, \_\_, \_\_$"*. El supuesto aquí es que hay una única respuesta correcta para los dos próximos terminos de la secuencia y, por implicación, para otro número de secuencias tal como* "$2, 4, 6, \_\_, \_\_$"*, y así. ¿Cómo se pueden llenar los espacios para este ejemplo? El patrón se debe continuar de la forma:* $2, 4, 6, 8, 10,$ *etc. Pero también puede ser continuado de esta forma:* $2, 4, 6, 2, 4, 6, 2, 4, 6$*. Otras continuaciones incluyen:* $2, 4, 6, 4, 2, 4, 6, 4, 2$ *o* $2, 4, 6, 5, 2, 4, 6, 5$*. [...] Dados solo los cuatro primeros términos de un patrón hay formas infinitamente sistemáticas y hasta polinimiales de continuarlo, no hay términos quinto y sexto* posiblemente incorrectos*.*

Ahora miremos los **criterios federales**.

Agenda para Tomar Medidas

En los últimos 25 años el Concejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM), una organización muy poderosa, publicó tres documentos expresando su visión de la educación matemática: "Agenda para Tomar Medidas" [AGENDA] (1980), una trilogía de "Criterios" [ST.1, ST.2, ST.3] (1989-1995) y "Principios y Criterios de las Matemáticas Escolares" o PSSM para reducir [PSSM] (2000).

Todos estos documentos son ideas vagas, perdidas y desorganizadas. La lista de "Recomendaciones para Matemáticas Escolares de los 80's" en la pág. 1 de la agenda es una mezcla extraña de sugerencias, algunas de las cuales parecen sonar confusas.

El primero es *"resolver problemas es el enfoque de la matemática escolar en los 80's"*, que sonó para mí (al principio porque me equivoqué al leer): "No enseñemos teoría". Los años siguientes mostraron que tan pronto los educadores evadieron el Scylla de la teoría evitaron el Charybdis de los problemas. Reclamaron que los problemas tradicionales eran muy malos y proclamaron la creación de problemas mejores que nunca se materializaron.

El segundo es *"las habilidades básicas en la matemática pueden ser definidas para aproximar la facilidad computacional"*, el cual es oscuro hasta que alguien aclare exactamente cuál facilidad computacional debe ser aproximada. Esta aclaración nunca llegó.

El tercero es *"los programas matemáticos toman completa ventaja del poder de las calculadoras y computadores en todos los niveles escolares"*, lo cual es una llamada en una dirección errónea, como tuvimos oportunidad de ver en los años posteriores.

Más cerca a nuestro tema, la "Agenda" sugirió

La definición de resolución de problemas no debería estar limitada al modo convencional de "problemas de palabra" [AGENDA], *pág. 3*

¿Qué significa esto? Cuando leí los clásicos de la educación americana, discreparía pero siempre entendí lo que querían decir. Sin embargo, en el presente caso es claro que ya en 1980 algo estaba mal con los problemas de palabra, pero que los autores no pueden explicar porque nunca lo hicieron claro para ellos mismos. Por supuesto, ninguna acción significativa podría ser tomada basados en una sugerencia inmadura.

"Criterios" de 1989

Sobre los "Criterios" de 1989-1995, los dos últimos volúmenes casi nunca fueron discutidos, contienen poca matemática o nada significativo. Permítanme hablar unicamente sobre "Criterios del Currículo", los cuales constituyen la mayor parte del primer volúmen [ST.1]. Las páginas 126-127 de [ST.1], están dedicadas al "resumen de cambios en el contenido y énfasis en las matemáticas de 9-12". La pág. 126 trata *tópicos para recibir mayor atención* y el primer tema es **El uso de problemas del mundo real para motivar y aplicar la teoría.** La pág. 127 trata *tópicos para recibir menor atención* y el primer tema es **Problemas de palabra por tipo tales como monedas, dígitos y trabajo.**

Ambas sugerencias produjeron gran confusión. Primero, puesto que es imposible aumentar o reducir la atención en la misma cosa, los problemas de monedas, dígitos y trabajo no son problemas del mundo real, de ahí que las monedas, dígitos y trabajos no existen en el mundo real. ¿Entendieron algo?

Se ha observado más de una vez que los "Criterios" de 1989 son un documento muy vago que diferentes lectores pueden interpretar de diferentes formas. H. Wu ilustró esto muy bien:

> *En la pág. 127, se sugiere que "Pruebas de dos columnas deben recibir menor atención". Esto implica que hay algo mal con las pruebas de dos columnas per se. Por supuesto esto es absolutamente falso: son excelentes para guiar a los estudiantes en los primeros pasos para escribir una prueba. Estas pruebas son injustamente culpadas porque la mayoría de los profesores no las entienden, con la consecuencia que invevitablemente abusan de ellas y las convierten en un impedimento en la educación matemática. Luego, para esta gente, la recomendación dada en los "criterios" (sin una explicación cuidadosa) lleva a una invitación automática para hacer todo sin pruebas.[...]*
> *También en la pág. 127, se sugiere que "los problemas de palabra por tipo tales como monedas, dígitos, y trabajo deben recibir menor atención". De nuevo aplica el mismo comentario de arriba: no hay nada malo con las monedas, dígitos o problemas de trabajo. Algunos de estos problemas son muy buenos. Lo que está mal es que en manos de profesores no calificados estos problemas llegan a ser entrenamientos insignificantes. [...] Lo que se necesita fijar es el problema de la calificación del profesor. La NCTM debe encontrar formas (diplomáticas) de expresar este hecho correctamente. La presente recomendación concerniente a "problemas de tipo" es posiblemente insignificante.*[Wu.standards], pág. 1-2

“Problemas del mundo real”

La parte de “criterios” para la escuela superior contiene una lista de tópicos de mayor atención, donde el primer lugar está dado a “el uso de problemas del mundo real para motivar y aplicar la teoría” (pág. 126). ¿Qué es un problema del mundo real?

Buscando en los “criterios”, encontré muy pocas declaraciones sobre estos seres misteriosos. En la pág. 76 (parte de escuela media) dice:

> *Las situaciones de problemas no rutinarios imaginados en estos criterios no más amplios en alcance y sustancia que los problemas aislados de rompecabezas. También son muy diferentes de los problemas de palabra tradicionales, que proporcionan contextos para usar fórmulas particulares o algoritmos pero no ofrecen oportunidades para resolver problemas verdaderos.*

¿Qué? ¿Qué dijeron sobre los problemas de palabra tradicionales? ¡Qué disparate! ¡Con su poca experiencia los autores pretenden fijar criterios! ¿Son conscientes de las ricas fuentes de excelentes problemas de palabra alrededor del mundo? Leamos más:

> *Los problemas del mundo real no son ejercicios ya hechos con procedimientos y números procesados fácilmente. Las situaciones que permiten a los estudiantes experimentar problemas con números “desordenados” o excesivos o sin suficiente información o que tienen múltiples soluciones, cada una con diferentes consecuencias, los prepararán mejor para resolver problemas que probablemente encontrarán en su vida diaria.*

Después de tales promesas presuntuosas podría ser muy apropiado dar varios ejemplos de estos problemas mágicos. Es más, encontramos un problema en la misma página, justo debajo del comentario citado. Aquí está:

Problema 27. María usó su calculadora para explorar este problema: Seleccione cinco dígitos para formar un numero de dos dígitos y uno de tres dígitos tal que su producto sea el mayor posible. Encontrar el orden que dá el menor producto.

Este es un buen problema, aunque un poco difícil para la escuela porque para acertar la respuesta María debe probarla, pero el autor nunca menciona la necesidad de una prueba. ¿Qué espera el autor del uso de la calculadora aquí? Esta puede ayudar para las multiplicaciones pero no para probar. Parece que el autor espera que María haga varios intentos para escoger uno que dé el mayor producto y decir que esta es la respuesta. Pero, ¿Qué pasa si la respuesta correcta nunca hubiera venido a su mente? Esta es una pedagogía muy mala. Notemos también que se espera que María solo "explore" este problema y no que lo resuelva. En mi opinión, la exploración es la primera etapa hacia la solución completa. ¿Los autores esperan que María en algún momento obtenga la solución completa? ¿Quieren que los niños **resuelvan** problemas o únicamente que los **alteren** por un momento?

Retornando al tema principal: los llamados "problemas del mundo real". Note que este problema no tiene **ninguna** de las cualidades atribuídas a estos misterioso criterios en la misma página: no hay demasiada ni suficiente información y tampoco hay múltiples soluciones. No puedo decir cuándo tiene números "confusos" porque no sé que significa esto. El autor debería dar alguna regla para diferenciar un número confuso de uno que no lo es.

De hecho, el volúmen de "Criterios" de 1989 contiene dos documentos diferentes: "Criterios de Currículo" y "Criterios de Evaluación". Hablé siempre del formador, pero alguien me dijo que hay algunos problemas que ajustan a la descripción de la pág. 76, en el último documento, exactamente en la sección llamada "Resolución de problemas" (págs. 209-213). Es más, hay seis problemas ahí. Aquí muestro algunos de estos:

Problema 28. Paula, Teresa y Dale corrieron una carrera. Finalizar la carrera le tomó a Paula tres minutos y a Dale cuatro. ¿quién ganó?

¿Quieren decir que la trivialidad preparará mejor a los estudiantes para resolver problemas que probablemente encontrarán en sus vidas diarias? ¿Llaman a esto escuelas para niños normales?

Problema 29. Con una calculadora, encontrar tres números cuyo producto es 2431. Registre los pasos que siguió para encontrar la respuesta.

Sin calculadora encontré que $2431 = 11 \times 13 \times 17$. Pero ¿por qué colocaron un artículo definido antes de "respuesta"? Ciertamente este problema tiene muchas respuestas, por ejemplo $(1, 1, 2431)$ o $(\pi, e, 2431/(\pi \cdot e))$. ¿Cuáles son las "diferentes consecuencias"?

Problema 30. Se tienen 10 cajas para pagar en una tienda. Seis personas están esperando en la caja rápida (10 o menos artículos). La caja 1 tiene una persona esperando y la caja 3 tiene dos personas. Las demás están cerradas. ¿Cual caja escogería para pagar? [St.1], pág. 212

Nunca he escuchado un reporte sobre el uso de este problema ni he leído una solución a este.

En el volumen completo de "Criteros" solo hay un problema explícitamente llamado del "mundo real", es este [ST.1], pág. 139:

Problema 31. *"Situación del Mundo Real."* En un juego de dos personas, se dá un punto en cada lanzamiento de una moneda equilibrada. El jugador que primero obtenga n puntos gana una pizza. Los jugadores A y B comienzan a jugar; sin embargo, el juego es interrumpido en el momento en que A y B tienen diferente puntaje. ¿Como se podría dividir la pizza correctamente? (La idea intuitiva de que A debe recibir una cantidad proporcional a su puntaje dividido por la suma de los puntajes de A y B es determinada como noequitativa)."
Esto es seguido por la "Formulación del problema":
"Considere la situación con los siguientes datos: El puntaje ganador es $n = 10$; cuando ocurre la interrupción, el puntaje es A:B=8:7. La pizza será dividida en proporción a la probabilidad de ganar del jugador."

Esta "formulación del problema" es equivalente a la descrita por Pascal en su carta a Fermat el 24 de Agosto de 1654 y es usada en libros introductorios de probabilidad, por ejemplo en los excelentes libros de Chung [CHUNG], pág. 26-28 y Snell [SNELL], pág. 3-5. Ambos se refieren a la carta de Pascal y dan un interesante bosquejo histórico. De otro lado, los "Criterios" omiten completamente todos los detalles históricos, lo que hace increible toda la situación. Pedí a varios simpatizantes de los "Criterios" que me refirieran a cualquiera de sus conocidos que alguna vez haya jugado esto, y no recibí ninguna respuesta positiva. ¿Los números involucrados son "confusos"? No sé por qué no entiendo qué significa "confuso". En cualquier caso este problema nunca tuvo demasiada o suficiente información y no tiene múltiples soluciones. Entonces, ¿en qué sentido es "mundo real"?

Si el autor fuera serio sobre la equidad del mundo real, debería recomendar dividir la pizza igualmente o dar un pedazo mayor al jugador más habriento, pero ciertamente *no* dividir la comida jugando. Los administradores de orfanatos se aterrarían con esta idea; ellos cuidan que cada pupilo consuma toda la comida que necesitan para su salud y no dependiendo de un juego. Además, ¿cuál es el significado de la palabra "desigual"?. Si no está tal significado entonces ¿cómo puede "determinarse" que una división es "desigual"? ¿que significa la palabra "determinada"?. El autor está intentando orientar al lector hacia una solución bien conocida sin explicar en qué sentido esta solución es correcta, lo cual es anti-matemático, es más, anti-racional. Aun más, el autor pretende que el requerimiento de dividir la pizza en proporción a la probabilidad que tiene cada jugador de ganar aparezca solo en la "formulación del problema", pero de hecho está implicitamente presente desde el principio porque de otro modo no puede "determinarse" que dividir la pizza en proporción a los puntajes del jugador no es "equitativo". Este supuesto es implícito pero no dicho, lo cual es anti-pedagógico. Aun dejando todo esto de lado, el valor educacional de este ejemplo es muy dudoso. Parece tener una ventaja al incluir la probabilidad en el currículo de la escuela superior pero de hecho los "Criterios" evitan cualquier teoría: solo trabajan con ejemplos numéricos, lo que es un paso atrás comparado con cualquier versión razonable del currículo tradicional.

La idea de la escuela es ser *organizada* de forma que los niños no pierdan su tiempo: está pensada de acuerdo a un currículo preparado para resolver problemas cuidadosamente diseñados, editados y probados. ¡Los autores quieren dificultar su eficiencia y presentar esto como una ventaja!

Otro argumento relevante se encuentra en la página 157 de los “Criterios” (parte escuela superior): “Antes del trabajo de los griegos antiguos (p.ej. Thales, Pitágoras), las ideas geométricas estuvieron ligadas a la solución de problemas del mundo real”. Entonces, problemas resueltos cientos de años atrás, cuando no había teoría, eran “problemas del mundo real”. Pero la pág. 126 recomienda usarlos para motivar y aplicar la teoría. ¿Cómo pueden los problemas propuestos y resueltos en ausencia de teoría motivarla y aplicarla? ¿Cómo podría reaccionar un campesino del antiguo Egipto si un oficial del gobierno obtuviera varias respuestas en la tarea de medir el área de su granja, cada una con diferentes consecuencias? No podría tal oficial ser rápidamente destituido o al menos provocar una rebelión?

¿Cual fue la posición de los matemáticos americanos hacia los “Criterios”?, este es otro misterio. El prefacio de los “Criterios” declara (pág. vi): “Las siguientes organizaciones matemáticas coinciden con el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas en promover la visión de las matemáticas escolares descrita en los Criterios de Currículo y Evaluación para las Matemáticas Escolares”, seguido por una impresionante lista incluyendo la American Mathematical Society (AMS). ¿Qué significa esta “promoción de la visión”? Ni la AMS ni la NCTM han hecho comentarios públicos sobre esto.

Cuando los “Criterios” comenzaron a ser implementados en las aulas, los matemáticos se horrorizaron y solo depués algunos observaron atentamente bajo la cubierta de los “Criterios”. No fue fácil porque están escritos de una forma tan vaga que son una tortura cuando los matemáticos los leen, como la cacofonía para los músicos. Sin embargo, algunos tuvieron éxito al darle sentido a esto. *Notices of AMS* publicó varias cartas solicitando a la AMS deshacer sus comentarios, pero no hubo respuesta de la AMS.

La Gran Guerra de las Calculadoras

Aunque son vagos los "Criterios" de la NCTM, ellos consiguieron una ayuda: difundir el uso de la calculadora en todos los grados de las escuelas públicas. Los "Criterios" de 1989 mencionan calculadoras, así que muchos profesores tuvieron la idea que ser modernos significa que todos los estudiantes usen calculadoras.

Stiegler y Hiebert hablan del siguiente episodio:

> *Cuando examinamos el video al que los profesores hacen referencia como ejemplos de reforma, damos una inquietante confirmación de la sospecha en el capítulo 6 – que enseñar la reforma, como fue interpretada por algunos docentes, puede empeorar lo que hacen en los salones de clases.*
>
> *Una profesora, por ejemplo, apuntó al uso de calculadoras como ejemplo de reforma en el salón de clases. La verdad, la NCTM recomendó que las calculadoras se introdujeran primero en el currículo, porque, entre otras razones, ellas ahorran tiempo de cálculo, así los estudiantes pueden poner su atención en resolver problemas y entender los conceptos. Pero no fue por esto que las calculadoras comenzaron a usarse en esta aula en particular. A mitad del camino para dar solución a un problema simple, los estudiantes necesitan dar solución al problema* $1 - 4$ *."Saquen sus calculadoras", dice el profesor. "Ahora, vayan conmigo. Presionen el uno, presionen el signo menos. Presionen el cuatro. Ahora presionen el signo igual. ¿Cuánto les dió?". La calculadora, en este caso fue la diversión y terminó con el interés de los estudiantes de entender las matemáticas.*

Mi familia llegó a USA poco después de haber sido publicados los "Criterios". Al principio yo conocía poco sobre las formas americanas pero observé de una vez que la profesora de matemáticas de mi hija impuso una calculadora en sus manos todo el tiempo. Entendí que tenía que hacer algo radical y comencé a llamar a mi hija "una víctima de la educación americana" cada vez que veía una calculadora en su mano. Al final de la escuela superior ella era de los pocos estudiantes que podían calcular mentalmente.

Todos estos años enseñé matemáticas en un colegio. Enseñando a novatos, los ví acudiendo a la calculadora cada vez que necesitaban calcular, por ejemplo, el diez por ciento de un número. Una vez arranqué la calculadora de la mano de un estudiante exclamando: "¡Usted puede hacerlo sin una calculadora!". El estudiante me miró fijamente por unos instantes, después siguió con lo que estaba haciendo, pero fuí la primera persona en decirle que este era el peor camino.

Por ese tiempo, yo estaba comprando comida en una tienda donde vedían ocho naranjas por un dólar. Coloqué (como pensé) ocho naranjas en una bolsa plástica y me dirigí hacia la cajera, quien las contó y me dijo que solo había siete. Yo no quería cruzar el pasillo por una naranja y le pedí el precio correspondiente a esas naranjas. La señorita (probablemente lejos de la escuela superior) tomó su calculadora pero no supo qué hacer. Fácilmente lo calculé mentalmente pero mantuve silencio para ver qué haría ella. Llamó a su supervisor, un hombre jóven con una gran calculadora, pero él tampoco pudo hacer nada. Contó las naranjas de nuevo, encontró que había ocho y esto cerró el tema.

En Octubre de 1999 el Departamento de Educación de USA, encabezado por Richard W. Riley aprobó diez programas de matemáticas K-12 llamando a cinco de ellos “ejemplares” y a los otros cinco, “promisorios”. Los programas aprobados son listados y descritos en [PROGRAMS].

Esta decisión se basó en conclusiones de un panel experto, la mayoría de quienes nunca habían publicado un artículo de investigación en matemáticas. La lista de miembros del panel experto está disponible en [PANEL]. De hecho, Manuel P. Berriozábal era el único miembro con un registro sustancial de investigación en matemáticas. Más tarde declaró:

> *Yo voté contra o me abstuve en cada programa considerado porque su impacto en mi opinión no evidenciaba ningún éxito.* [BERR]

Aunque hay muchos matemáticos brillantes en USA, por un largo tiempo no fueron invitados a participar de la toma de decisiones importantes sobre la educación. Sinceramente, no eran especialmente objetivos. Como todas las personas, los matemáticos son dados a evitar el trabajo extra y algunas veces dicen: “¿Por qué debo molestarme con la educación pública? Hay personas especiales para cuidar de esta.” Sin embargo, algunos decidieron actuar, el 18 de Noviembre de 1999 el Washington Post publicó una carta firmada por 200 matemáticos y otros científicos, incluyendo a prominentes educadores, solicitando a Riley revocar la aprobación de su Departamento. La carta está endosada por siete Nobels laureados y ganadores de la Medalla Fields, el máximo premio en la matemática.

Esto es lo que David Klein escribe sobre la situación:

Los programas de matemáticas criticados por la carta tienen características comunes. Por ejemplo, tienden a sobre-enfatizar el análisis de datos y estadística, lo cual aparece año tras año con presentaciones redundantes. Estos alejan áreas más importantes de aritmética y álgebra que son radicalmente subestimados. Muchos de los llamados proyectos de orden superior son actividades inútiles y la iluminación genuina de ideas matemáticas importantes es rara. Hay casi una obsesión por las calculadoras y las habilidades básicas son descartadas y algunas veces hasta menospreciadas. [...]

El Departamento de Educación de USA no está solo en promocionar programas matemáticos flojos y defectuosos. La NCTM también ha aprobado formalmente cada uno de los modelos de programa del Departamento de Educación de USA [NCTM.letter] *y la Fundación Nacional de Ciencia (División de Educación y Recursos Humanos) encontró varios de ellos. [...]*

Estas organizaciones representan intereses sorprendentemente reducidos y hay una puerta giratoria entre ellos. El miembro del panel Steven Leinwand, cuyas conexiones personales con los currículos "ejemplares" ya habian sido notadas, es también miembro de la junta directiva de la NCTM. Luther Williams, director asistente de la NSF aprobó varios de los currículos recomendados, tambien sirvió en el panel que evaluó estos mismos. Jack Price, miembro del panel es ex-presidente de la NCTM y Glenda Lappan, la presidenta actual de la asociación, es coautora del programa "ejemplar" CMP. [Klein]

Los conflictos de interés de los miembros del panel fueron comentados en los medios. Un artículo concluyó:

> *El proceso de revisión pareció deteriorarse en una reunión de amigos revisando cada uno el trabajo de los otros y después usando métodos pseudo-científicos para reforzar sus argumentos. El proceso fue inherentemente quebrado.*
> [KidsDoCount]

Entonces observamos una confrontación abierta entre matemáticos y científicos en un lado y oficiales educacionales y líderes en el otro.

¿Esto es solo sobre errores y conflicto de intereses? No. Otro punto importante de la confrontación es cuándo a los niños se les debe enseñar algoritmos aritméticos de papel y lápiz y cuándo usar la calculadora en vez de esto. La diferencia de opiniones puede ser ilustrada en dos citas, incluidas en la carta de los matemáticos. Una es de un artículo escrito por Steven Leinwand, miembro del panel experto (quien tambien fue en diferentes años miembro de los directores de la NCTM y miembro del consejo para los tres programas que estaban siendo evaluados por el panel), titulado "Es tiempo de abandonar los algoritmos computacionales" y publicado el 9 de Febrero de 1994 en la web de *Education Week* [Leinwand]:

> *Es tiempo de reconocer que para muchos estudiantes el poder real de la matemática de un lado, y la facilidad con multidígitos y algortimos con lápiz y papel del otro lado, son mutuamente exclusivos. De hecho es tiempo de reconocer que continuar enseñando estas habilidades a nuestros estudiantes no es solo innecesario sino contraproducente y francamente peligroso.*

La otra cita es de un reporte hecho por un comité formado por la AMS para el propósito de representar sus opiniones a la NCTM:

> *Quisiéramos enfatizar que los algoritmos estándar de la aritmética son más que "formas de obtener la respuesta" – esto es, tienen significancia tanto teórica como práctica. Por una razón, todos los algoritmos de aritmética son preparatorios para el álgebra, puesto que son (de nuevo, no por accidente sino por loa virtud de la construcción del sistema decimal) analogías fuertes entre la aritmética de números ordinarios y aritmética de polinomios.* [AMS.REPORT]

En Rusia los cálculos mentales y de papel y lápiz siempre fueron recomendados y considerados esenciales para entender. Por ejemplo, Igor Arnold escribió en su libro "Logaritmos en el álgebra de escuela" (no tengo este libro conmigo y lo cito de memoria): "Decimos a los estudiantes que $\log_{10} 2 \approx 0.30103$ porque se puede obtener 2 elevando 10 esta potencia, pero el problema es que el estudiante nunca ha visto a nadie obtener 2 de esta forma." En vista de esto, Arnold recomendó enseñar a los estudiantes a estimar logaritmos con cálculos mentales y de paso, sin tablas (las calculadoras no estaban disponibles en los 30's, cuando Arnold escribió su libro, pero es claro que diría lo mismo si lo hubiera hecho después). Por ejemplo, $2^{10} = 1024$, que es un poco más de 10^3, de ahí $\log_{10} 2$ es un poco más de 0.3, $\log_{10} 5$ es un poco menos de 0.7, $\log_{10} 4$ es un poco más de 0.6 y $\log_{10} 8$ es un poco más de 0.9. Después de esto, usando interpolación, podemos estimar que $\log_{10} 9$ es un poco más de 0.95, $\log_{10} 3 \approx 0.48$, de donde $\log_{10} 6 \approx 0.78$. Interpolando entre 6 y 8 dá $\log_{10} 7 \approx 0.84$. Otras relaciones numéricas permiten verificar y mejorar estas estimaciones.

Como los problemas de palabra son difíciles para algunos profesores, es natural decir: "es lamentable que somos débiles en resolver problemas de palabra. Deberiamos poner más atención a ellos en las escuelas de educación. Los libros y exámenes deben contener problemas de palabra más variados. Las revistas de educación deben publicar artículos instruyendo a los profesores para ensenãr problemas de palabra. Los libros deben colocarlos en un orden razonable, comenzando por los fáciles y gradualmente incrementar su dificultad para dejar los más difíciles al final." Todo esto fue hecho en Rusia en alguna medida por un largo tiempo y aun es hecho, pero parece que nada de esto fue hecho en USA por un largo tiempo. En cambio, los líderes educacionales intentaron crear la impresión que habia algo malo con los problemas de palabra para ellos mismos. Ya hemos visto cómo los "Criterios" culparon a los problemas de palabra "por tipo" de la incompetencia de los profesores. Aqui hay otro ejemplo: "Mathematics Teacher" (principal revista americana para profesores de matemáticas de escuela superior) publicó un artículo escrito por Zalman Usiskin, donde recomendaba eliminar los "tradicionales problemas de palabra" del currículo. Escribió:

> *Los problemas tradicionales de palabra (monedas, edad, mezcla, distancia-tasa-tiempo y dígitos) están en el currículo por varios objetivos valiosos como traducir del mundo real a la matemática. Pero excepto por los problemas de mezcla, no ayudan a alcanzar el objetivo. De hecho, convencen a los estudiantes de que no son aplicaciones reales del álgebra porque son ridículos.* [USISKIN.NOT], *pág. 158-159*

En la misma página escribió: "El álgebra tiene tantas aplicaciones reales que los problemas de palabra tradicionales hipocritos no son necesarios."

Es muy agradable de leer para los profesores ignorantes porque tienen sus propias razones para evitar los problemas de palabra. ¿Pero cómo hacer para que la purga de los farsantes problemas de palabra parezca científica? A este respecto el legado del famoso Thorndike es muy útil.

¿Por qué Usiskin llama hipocritos a los problemas tradicionales de palabra? Él cita el problema "Una persona tiene 20 monedas en su bolsillo, algunas de cinco y otras de diez centavos. El valor total de de $1.75. ¿Cuántas monedas de cinco centavos y cuántas de 10 había?" y continúa "Como las monedas fueron contadas, no podría el contador haber llevado la cuenta del número de monedas de 10 centavos?" (pág. 159).

Argumentos así fueron originalmente propuestos por Edward L. Thorndike, aunque el libro [THORNDIKE] nombra varios autores, Thorndike fue el líder, así que me refiero a él como el autor. En la pág. 137 de [THORNDIKE] Thorndike comienza la sección *Auténticidad* escribiendo:

> *Relativamente pocos de los problemas actualmente en uso son auténticos. Primero, cerca de la mitad de ellos son problemas donde, en el curso ordinario de eventos, los datos dados aseguran el conocimiento de la respuesta. Por ejemplo, "en diez años John tendrá la mitad de la edad de su papá. En veinte años tendrá tres quintos de la edad de su papá. ¿Cuántos años tiene John actualmente? ¿Cuántos años tiene su papá?" En realidad tal problema pude ocurrir en la eventualidad de que alguien sepa que John tiene 10 años y su padre 30, conozca estas tasas futuras de las edades, después olvide los 10 y 30 originales pero recuerde cuáles eran las tasas futuras.*

Thorndike pensó que los problemas que no se encontraban en la vida diaria, tenían un sentido inútil y propuso excluirlos del currículo. Usiskin simplemente repite su propuesta. Sin embargo, ya en el tiempo de Thorndike se había notado que

> *...en la mayoría de casos ellos (los alumnos) muestran poco interés en problemas a los cuales los profesores dan mayor interés. Los alumnos no se preocupan mucho sobre la realidad de los problemas que deben resolver.* [BRESLICH], *pág. 185*

Aun así, Thorndike siempre persistió en sus ideas. Los niños que no se conformaron eran el tipo de ninõs malos y no merecían atención científica. Sus ideas persisten en el pensamiento americano. Por ejemplo, el siguiente problema puede ser usado casi en qualquier parte del mundo sin objeciones:

Problema 32. Sally tiene cinco años más que su hermano Bill. En cuatro años tendrá el doble de la edad de Bill. ¿Cuántos años tiene Sally ahora?

En América es inhabilitado por las siguientes razones: "Primero, ¿Quién podría hacer tal pregunta! Quién podría querer saber esto? Si Bill y Sally no pueden preguntarlo, entonces es alguna familia muda." [SMITH], pág. 85.

Smith no se refiere a Thorndike o cualquier otra autoridad. Parece pensar que lo que dice es de innegable sentido común. Esto es peor que si se hubiera referido a alguna teoría. Significa que alguna parte de la población americana, incluyendo Smith, tiene completamente lavado el cerebro para no imaginar nunca un punto de vista alternativo.

En Rusia (y pienso que en la mayoria de países) estos argumentos inverosímiles serían desechados como malas bromas. Como ejemplo opuesto, más aproximado, permítanme citar un libro de Perelman [PERELMAN.A], donde el segundo capítulo, llamado “El lenguaje del álgebra”, consiste en 25 secciones cada una dedicada a un problema. Uno de ellos, llamado “Una ecuación piensa por nosotros”, comienza así:

Problema 33. Si usted duda que una ecuación es algunas veces más prudente que nosotros, resuelva el siguiente problema: Un papá tiene 32 años, el hijo tiene 5 años. ¿En cuántos años la edad del padre será diez veces la edad del hijo?

Se hace una ecuación y se resuelve pero la respuesta es negativa: -2. ¿Qué significa? Perelman explica: “cuando hicimos la ecuación no pensamos que la edad del padre nunca será diez veces la del hijo en el *futuro* - esta relación solo pudo darse en el *pasado*. La ecuación se tornó más analítica y nos recordó nuestra omisión.” Pienso que este comentario es realmente instructivo y constituye una razón suficiente para discutir el problema.

El problema 32 probablemente está clasificado en América como “álgebra”, pero puede ser resuelto aritméticamente con facilidad. Es suficiente observar que la diferencia de edades es igual todo el tiempo, entonces en cuatro años Sally será cinco años mayor que que Bill y dos veces mayor que Bill. Así, la edad de Bill será igual a la diferencia de edades, que es cinco años, la edad de Sally en ese momento será el doble de esta, es decir, diez años. Luego, Sally tiene seis años actualmente.

Imaginen que a los profesores de literatura en un cierto país les hacen pensar a través de su preparación profesional que todos los cuentos de hadas, fábulas e historias fantásticas son inútiles. Cuando se habla de fábula, donde los animales hablan con otros, no pueden disfrutarlas como los niños, agotando su imaginación para entender como podría suceder esto en la vida real: ¿los animales fueron entrenados especialmente para hablar?, ¿se les practicó alguna operación? ¿fueron personas disfrazadas?, etc. Si no se encuentra una explicación realista, las fábulas se declaran inútiles y no interesantes para los niños. Tomando la fábula de Esopo "El Zorro y el Cuervo", desde este extraño punto de vista que está esparcido entre los profesores americanos, esta fábula solo es útil para aquellos que tengan la oportunidad en algún futuro de colgarse en la rama de un árbol con una pieza de ajedrez en sus bocas.

Puesto que Usiskin declaró que "el álgebra tiene muchas aplicaciones reales", podemos esperar suficientes de ellas en su programa UCSMP para los grados 7-12 declarada "promisoria" para el panel experto, pero este no es el caso. Las "Revisiones matemáticamente correctas de álgebra 1" [MathematicallyCorrect] colocaron a este programa como el más bajo en "calidad y suficiencia del trabajo del estudiante" y dijo al respecto:

> *...hay pocos problemas para cada subtópico, fallan al cubrir los niveles de dificultad superior. El cubrimiento de los problemas de palabra es especialmente débil, como no hay una buena introducción a escribir ecuaciones con variables desconocidas, hay poca práctica y los problemas de no palabra van más allá del nivel fácil.*

¿Donde están estas "muchas aplicaciones reales"?

De otro lado, hay buenos problemas en matemáticas aplicadas y hay colecciones valiosas de ellos, pero todos necesitan más que matemática escolar. Tomemos una de estas colecciones [Klamkin] y listemos los títulos de sus secciones:

> *Mecánica, resistencia eléctrica, probabilidad, combinatoria, series, funciones especiales, ecuaciones diferenciales ordinarias, integrales definidas, ecuaciones integrales, matrices y determinantes, aproximaciones numéricas y expansiones asintóticas, desigualdades, optimización, teoría de grafos, geometría, polinomios, ecuaciones simultáneas, identidades, ceros, ecuaciones funcionales, misceláneas.*

Para resolver estos problemas, mismo entender lo que la mayoría de ellos pregunta, se necesita saber matemáticas más substanciales. Pero estamos hablando de etapas más iniciales del aprendizaje de la matemática. Resolver problemas de palabra en esta etapa no es una preparación para la actividad profesional en el área correspondiente. Por ejemplo, si un problema envuelve carros que se mueven hacia otros, este **no** es preparación para los futuros conductores, en cambio estos carros son los modelos mentales de los estudiantes para lidiar con abstracciones: las variables y sus relaciones. Cada matemático sabe lo importante que es la imaginación para hacer matemáticas. Para trabajar con abstracciones necesitamos representarlas mentalmente de varias formas.

Resolver problemas de palabra es una forma de desarrollar la imaginación de los niños para manejar las abstracciones científicas.

También podemos encontrar "aplicaciones reales" del álgebra en "Muestra de Problemas de Álgebra" incluido en este artículo con un título promisorio "¿Por qué es Importante Aprender Álgebra?" [Usiskin.why], pág. 34. Esta publicación dió al prominente educador una excelente oportunidad para ilustrar sus tesis. Miremos el primer problema en la muestra:

Problema 34. El Almanaque Mundial y el Libro de los Hechos. El año 1995 lista 59 grandes terremotos desde 1940 hasta 1994. Están en frecuencias por estaciones del año: Otoño, 14; Invierno, 14; Primavera, 11; Verano, 20. Use estadística para determinar cuándo estas frecuencias apoyan la idea de que ocurren más terremotos en ciertas épocas del año que en otras, o si ocurren diferencias como estas por pura casualidad. (expresiones cuadráticas)

Este es un ejercicio en aplicación del criterio chi-cuadrado, que bien puede ser usado en un curso universitario de estadística matemática. En tal curso un profesor puede discutir las condicones bajo las cuales este criterio puede ser aplicado. Para tomar tal curso, los estudiantes necesitan estar ya familiarizados con la teoría de variables aleatorias continuas, que a su vez está basada en varios semestres de cálculo. Lo que Usiskin mostró es que los cursos de matemáticas y estadística de la universidad son importantes para aprender a ser un profesional en estadística. Pero esto lo sabíamos muy bien sin él, esto no significa que el *álgebra de la escuela* es importante de aprender para aquellos que no serán científicos profesionales.

Miremos el segundo problema en la muestra:

Problema 35. Para estimar el número N de ladrillos necesarios en un muro, algunos albañiles usan la fórmula $N = 7LH$, donde L y H son la longitud y altura del muro, en pies. ¿Cuántos ladrillos necesitaría el albañil para un muro de 8.5 pies de altura y 24.5 pies de longitud? (fórmulas)

Si Usiskin quería dar a los estudiantes un ejercicio para acomodar números en una fórmula, este es. Sin embargo, mi visión de matemática escolar es diferente, quiero que los niños *entiendan* el mundo que los rodea. ¿Esta fórmula depende del grosor del muro y parámetros de un ladrillo estándar? Si así es, ¿como?, ¿El cemento entre los ladrillos también es importante? ? 'Por qué L y H se multiplican en la fórmula? ¿Por qué no se suman?. Usiskin no sugiere discutir todo esto, no enfatiza que el profesor debería involucrar a los estudiantes en la *deducción* de esta fórmula a partir de los parámetros de ladrillos reales (fáciles de encontrar en cualquier lugar de construcción), el grosor usual de los muros y el cemento entre los ladrillos y las propiedades de los volúmenes –lo que sería una actividad muy fructífera. También hay algo raro con las dimensiones: si el número 7 no tiene dimensión, entonces la fórmula $7LH$ tiene dimensión de pies cuadrados. ¿Cómo puede esto ser igual a N, que no tiene dimensión? Parece que Usiskin no tuvo cuidado en la dimensión pero yo ciertamente lo hice.

Si observamos los otros problemas de la muestra de Usiskin, encontramos que intentó hacerlos parecer relevantes en varios aspectos de la vida diaria, pero cada vez ésta es inverosímil. Entonces su tesis de que el álgebra de la escuela tiene muchas aplicaciones reales permanece sin probar. Mientras tanto (pienso que será un largo mientras tanto), no debería desalentar a los profesores para usar los problemas tradicionales de palabra.

REFERENCES

References are placed in the alphabetic order of labels.

[AERA2004] Go to http://convention.allacademic.com/aera2004/

[Agenda] *An Agenda for Action. Recommendations for School Mathematics of the 1980s.* NCTM, Reston, VA, 1980.

[AMS.report] *American Mathematical Society NCTM2000 Association Research Group Second Report. June 1997.* Notices of the AMS, February 1998, pág. 275.
http://www.ams.org/notices/199802/comm-amsarg.pdf

[Arnold] S. H. Lui. *An Interview with Vladimir Arnold.* Notices of the AMS, vol. 44, n. 4, pág. 432-438.

[Baruk] Stella Baruk. *L'âge du capitaine. De l'erreur en mathematiques.* Éditions di Seuil, 1985. (In French.)

[Berez] E. S. Berezanskaya. *Collection of problems and exercises in arithmetics. For 5-th and 6-th classes.* 20-th edition. Uchpedgiz, Moscow, 1953. (In Russian.)

[Berr] Manuel P. Berriozábal. *Reforms in Mathematics Education: Best Practices and Malpractices.* An Invited Address at the 85th Annual Meeting of the Mathematical Association of America.
http://www.math.utsa.edu/~prep

[Braams] Bastiaan J. Braams' web site
http://www.math.nyu.edu/mfdd/braams/links/pisa0207.html

[Breslich] Ernst R. Breslich. *Problems in Teaching Secondary-School Mathematics.* The University of Chicago Press, Chicago-IL, copyright 1931, 1940.

[Chung] Chung, Kai Lai. *Elementary Probability Theory with Stochastic Processes.* Springer, 1979.

[Fordham.Klein] *The State of State Math Standards 2005 by David Klein a. o.* Thomas B. Fordham Foundation, January, 2005.

[Fordham.RB] Ralph A. Raimi and Lawrence S. Braden. Fordham Report: State Mathematics Standards. http://www.edexcellence.net/standards/math.html.

[Gap:L] Harold W. Stevenson and James W. Stigler. *Learning Gap.* Touchstone, 1992.

[Gap:T] James W. Stigler and James Hiebert. *Teaching gap.* The free press, 1999.

[Geidman.2.1] B. P. Geidman a.o. *Mathematics. 2 grade. First half-year.* Moscow, 2004. (In Russian.)

[Geidman.2.2] B. P. Geidman a.o. *Mathematics. 2 grade. Second half-year.* Moscow, 2004. (In Russian.)

[Geidman.4.1] B. P. Geidman a.o. *Mathematics. 4 grade. First half-year.* Moscow, 2004. (In Russian.)

On school mathematical education. Theses for a talk at the seminar of IKI of the Russian Academy of Sciences on February 28, 2002. (In Russian.)

[GT] G. A. Galperin and A. K. Tolpygo. *Moscow mathematical olympiads.* "Prosveschenie", Moscow, 1986. (In Russian.)

[Homeschool] Why Homeschoolers Like Singapore Math.
`http://www.sonlight.com/singapore.html`

[Kensch] Patricia Clark Kenschaft. *Racial Equity Requires Teaching Elementary School Teachers More Mathematics.* Notices of AMS, February 2005, v. 52, n. 2, pág. 208-212.

[KidsDoCount] KidsDoCount. Seeking Excellence in Math Education.
`http://snow.prohosting.com/mathiq/bkgrd.html`

[Klamkin] *Problems in Applied Mathematics.* Selections from SIAM Review. Edited by Murray S. Klamkin. SIAM, 1990.

[Klein] David Klein. MATH PROBLEMS. Why the U.S. Department of Education's recommended math programs don't add up. *American School Board Journal*, April 2000. Available at
`http://www.mathematicallycorrect.com/usnoadd.htm`

[Kline] Morris Kline. *Why Johnny can't add: the failure of the new math.* New York, St. Martin Press, 1973.

[Kordem] Boris A.Kordemsky. *The Moscow Puzzles. 359 Mathematical Recreations.* Edited and with an introduction by Martin Gardner. Translated from Russian by Albert Parry. Dover Publications, Inc., New York, 1992.

[Kudr] L. D. Kudriavtsev. *On reforms of education in Russia.* Education which we can lose. Ed. by V. A. Sadovnichiy. Moscow State Univ. Press, Moscow, 2002. (In Russian.)

[Larichev] P. A. Larichev. Collection of problems in algebra. Part I for 6-8 grades. "Uchpedgiz", Moscow, 1961 (in Russian.)

[Leinwand] `http://www.edweek.org/ew/1994/20lein.h13`

[Ma.book] Liping Ma. Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ, 1999.

[Ma.talk] Liping Ma. Arithmetics in American Mathematics Education: An Abandoned Arena? `http://www.cbmsweb.org/NationalSummit/Plenary_Speakers/ma.htm`

[MathematicallyCorrect] MathematicallyCorrect algebra reviews: `http://mathematicallycorrect.com/algebra.htm`

[Moro.4.2] Mathematics. Textbook for the fourth grade of elementary school in two parts. Part 2 (Second half-year). By M. I. Moro a.o. "Prosveshenie", Moscow, 2004. (In Russian.)

[NCTM.letter] NCTM's letter: `http://www.nctm.org/rileystatement.htm`

[panel] `http://www.ed.gov/offices/OERI/ORAD/KAD/expert\_panel/mathmemb.html`

[Perelman.A] Ya. I. Perelman. Amuzing algebra. Edited and supplied by V. G. Boltyansky. "Nauka", Moscow, 1976. (In Russian.)

[Perelman.P] Ya. I. Perelman. Amusing problems. Moscow, 2001. (In Russian.)

[PISA.Br] Address of PISA quoted by Braams: `http://www1.oecd.org/publications/e-book/9600051E.PDF`

[PISA.Vas] Address of PISA quoted by Vassiliev: `http://www.pisa.oecd.org/Docs/Download/PISAFrameworkEng.pdf`.

[Polya] George Polya. Mathematical Discovery. On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving. Combined Edition. John Wiley & Sons, 1981.

[programs] `http://www.enc.org/ed/exemplary/`

[PSSM] Principles and Standards for School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

[PS] Ewa Puchalska and Zbigniew Semandeni. Children's Reactions to Verbal Arithmetical Problems with Missing, Surplus or Contradictory Data. Available at internet. Reprinted with permission of *For the Learning of Mathematics*.

[Rus.Fed] The Federal Component of the National Standard of Public Education. Part I. Elementary General Education. Main General Education. Part II. Middle and High (complete) General Education. Moscow, 2004. (In Russian.)

[Selter] Christoph Selter. How old is the captain? Strategies, Vol. 5, No. 1, October 1994. (Available at www.)

[Shevkin.A] A. V. Shevkin. Word problems in school teaching. *Archimed*, a scientific-metodical collection. Issue 1, 2005, Moscow, pp. 61-63. (In Russian.)

[Shevkin.T] A. V. Shevkin. Teaching to solve text problems in 5-6 grades.Book for a teacher. “Russkoe slovo”, Moscow, 2002. (In Russian.)

[Smith] Michael K. Smith. *Humble Pi.* “Prometeus Books”, 1994.

[Snell] Snell, J. Laurie. *Introduction to Probability.* McGraw-Hill, 1989.

[Sing.5A] Primary Mathematics 5A. Third Edition. Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education, Singapore.

[Sing.6A] Primary Mathematics 6A. Third Edition. Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education, Singapore.

[St.1] Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Prepared by the Working Groups of the Comission on Standards for School Mathematics of the National Council of Teachers of Mathematics. NCTM, March 1989.

[St.2] Professional Standards for Teaching Mathematics. Prepared by the Working Groups of the Comission on Standards for School Mathematics of the National Council of Teachers of Mathematics. NCTM, March 1991.

[St.3] Assessment Standards for School Mathematics. Prepared by the Assessment Standards Working Groups of the National Council of Teachers of Mathematics. NCTM, May 1995.

[Thorndike] Thorndike, Edward L. a.o. The psychology of algebra. The Macmillan Company, New York, 1926.

[TIMSS] About TIMSS see the web site `http://timss.bc.edu`

[Toom.How] A. Toom. How I Teach Word Problems. *Primus,* v. VII, n. 3, September 1997, pp. 264-270.

[Usiskin.not] Zalman Usiskin. What Should *Not* Be in the Algebra and Geometry Curricula of Average College-Bound Students? *Mathematics Teacher*, v. 88, n. 2, February 1995, pp. 156-164.

[Usiskin.why] Zalman Usiskin. Why Is Algebra Important To Learn? (Teachers, this one’s for your students!) *American Educator*, Spring 1995, pp. 30-37.

[Vassiliev] V. A. Vassiliev. Role of Mathematics, As They Think of it. Letter to the Editor. Notices of AMS. September 2004, vol. 51, n. 8, pp. 870-871.

[VGRT] N. B. Vasilyev, V. L. Gutenmacher, J. M. Rabbot, A. L. Toom. Mathematical Olympiads by Mail. 2-d ed. “Nauka”, Moscow, 1986. (In Russian.)

[Wu.standards] Hung-Hsi Wu. Invited Comments on the NCTM Standards (1996). *Available at Wu’s home page* `http://math.berkeley.edu/~wu/`