ULF PERSSON & ANDRÉ TOOM

Ryska matematiska skolproblem

Här ger två matematiker sin syn på hur undervisningen kan utvecklas, med en strukturerad lärogång i problemlösning. Sådan undervisning har lång tradition i Ryssland, varifrån exemplen är hämtade. Problemen är av olika slag och flera av dem erbjuder också möjlighet till historisk anknytning.

Under de senaste åren har larmrapporterna om svenska skolbarns dalande färdigheter i matematik duggat tätt. Detta har orsakat mycken förtvivlan och kostsamma och involverade projekt att försöka stämma den nedgående trenden. Det finns ingen enkel lösning på problemet, i själva verket är kommunikation och lärande mycket komplicerat och otillräckligt förstått. I brist på någon "vetenskaplig" lösning till problemet, är det naturliga att inta en pragmatisk attityd baserad på sunt förnuft och att leta efter framgångsrika traditioner. Vi är övertygade om att en sådan tradition faktiskt existerar, mitt framför näsan på oss också, nämligen den ryska.

Rysk matematik åtnjuter högt anseende och efter Sovjetunionens kollaps konkurrerar ryska matematiker om tjänster över hela världen. Under tiden fortsätter Ryssland att frambringa begåvade unga matematiker. Det är naturligt att peka ut och studera de aspekter av rysk matematikundervisning som kan vara ansvariga för denna framgång. En av oss, André Toom, är av rysk härkomst, den andre, Ulf Persson, svensk. Vi beslutade oss för att skriva denna artikel tillsammans eftersom vi båda högt uppskattar åtminstone en komponent av den allmänna ryska skolutbildningen, det rika flödet och den stora variationen av problem. De klassiska beteckningarna "benämnda tal" och "word problems", som de kallas i USA, är olyckliga och missvisande på alla skolnivåer som vi strax skall visa.

I Ryssland börjar barnen att lösa komplicerade problem många år innan de börjar studera algebra. De löser problemen med sina "bara händer" innan de knappt har börjat behärska de grundläggande räknesätten. Det är därför dessa problem kallas aritmetiska i Ryssland. Det länder de ryska pedagogerna stor heder att de har bevarat denna tradition med problem i kursplanerna, och avhållit sig från att anamma de villoläror som hemsökt andra länder, speciellt USA.

Den ryska traditionen kan tjäna som ett konkret föredöme och motvikt till allehanda teoretiska spekulationer om matematikundervisningen som har publicerats, varav en del dock erkännes vara intressanta såsom filosofisk reflektion.

Vi tänker här koncentrera oss på konkreta problem och diskutera några av dessa, ty det är vår övertygelse att "the devil is in the details", och att det är genom bevarandet av en framgångsrik tradition som de mest påvisbara praktiska konsekvenserna för utbildningens kvalitet visar sig.

Träning av räknefärdigheter är nödvändig fastän elever sällan finner den vara rolig och spännande. Men å andra sidan ingjuter alla tillägnade färdigheter stolthet och tillfredställelse. På senare tid har det dock blivit kutym att undvika denna tradiga process genom att låta eleverna använda räknedosor. Vissa personer hävdar att färdigheter såsom huvudräkning eller räkning med hjälp av penna och papper är förlegade eftersom beräkningar nu kan åstadkommas så mycket snabbare och säkrare med räknedosor. Det har figurerat många löften om att befrielsen från räknandets mödor tillåter eleverna att koncentrera sig på de mera centrala och begreppsmässiga aspekterna av matematiken. Argumenten för eller emot räknedosor har redan bollats fram och tillbaka under decennier. Vi tänker inte deltaga i den debatten utan nöjer oss med att påpeka att syftet med räknandet i skolan inte är svaren utan möjligheten att bli förtrogen med talen.

Problem stimulerar tänkandet

Vårt huvudsakliga syfte med denna artikel är en annan aspekt av elementär matematikundervisning, nämligen den att lösa problem. Huvudsyftet med problem är inte att testa eller öva räknefärdigheten utan att stimulera tänkandet. Om en elev fattar tycke för matematiken är det nästan alltid för de intellektuella utmaningar denna erbjuder. Men för att detta skall fungera behövs åtminstone någon rudimentär räknefärdighet. Kärnan i denna artikel är en kort lista av problem som ryska skolbarn i allmänhet har konfronterats med. Dessa problem har tagits från olika källor, inklusive de moderna böckerna av Moro m fl från 2004 och en lärobok för första delen av fjärde klassen av Geidman m fl, också från 2004. Dessutom har problem tagit från böcker av Berezanskaya (1953), Larichev (1961) samt från Perelman (2001). Alla dessa är allmänt spridda i det ryska skolväsendet, men med få undantag aldrig översatta.

All inlärning sker via stadier. Att identifiera stadier och deras naturliga ordningsföljd är uppenbarligen ett gigantiskt problem, till största delen fortfarande olöst. Det mest välkända försöket har gjorts av Piaget. Hans välkända serie av inlärningsstadier har kritiserats och förblir mycket kontroversiellt, vilket är förståeligt eftersom pedagogik inte är en "exakt" vetenskap. Denna brist har inspirerat en del moderna pedagoger att i post-modernistisk anda hävda att alla sätt är lika legitima. Läggande denna kontrovers åt sidan, tänker vi begränsa oss till att påpeka det uppenbara, nämligen den att all formell instruktion är hierarkiskt uppbyggd, ny kunskap bygger på gammal. Strukturerad inlärning tycks vara speciellt väsentligt i den grundläggande matematiken.

Olika problemtyper

En av de mest uppenbara strukturerna att klassificera problem är att ta hänsyn till antalet aritmetiska operationer, "steg", som är nödvändiga för att lösa desamma. Således kan vi tala om en-stegs problem, två-stegs problem, upp till fem-stegs problem. I ryska skolor konfronteras normalt förstaklassarna med en-stegs problem i slutet av året, andra klassen med två-stegs problem osv. Naturligtvis är denna klassificering av nödvändighet vag, det finns inget kanoniskt sätt att identifiera varje steg, och dessutom består den centrala svårigheten i allt resonerande i att genomföra de relevanta förenklingarna (påpekat bland annat av William James, 1890/1950). Trots detta anser vi i ljuset av problemens elementära natur att denna vaghet inte är fatal, utan att klassificeringen är tillräckligt objektiv för att vara användbar.

Bara händer och sunt förnuft

Det urval av problem som följer nedan är av nödvändighet litet. Vi vill framhålla att det just är det stora antalet problem som gör dessa till en sådan tillgång i matematikundervisningen i de ryska skolorna. Så många olika problem gör det praktiskt omöjligt att reducera alla problemen till några få typfall och därmed reducera lösandet till att applicera några få rigida scheman istället för att uppmuntra elevens eget skapande tänkande. Med andra ord, de ryska skolproblemen förväntas inte att lösas med metoder som presenteras i förväg, utan *ad hoc* och med utnyttjandet av inget annat än bara händer och sunt förnuft. De matematiska förkunskaperna går inte utöver förtrogenhet med talen och dess elementära operationer. Detta betyder inte att generella metoder inte förekommer i ryska skolor, utan bara att dessa uppkommer som en följd av problemlösningen, inte som en förutsättning för lösandet av desamma.

Det värsta som kan göras med problem, och som tyvärr ofta görs, är att betrakta dem som uppklädda räkneuppgifter, benämnda tal, och därmed betrakta dem som spel där man ska gissa vilka räkneoperationer som efterfrågas, och därmed helt bortse från deras meningsfulla innehåll. Vi anser att det mest charmerande med dessa problem är just gapet mellan lösningen av ett problem och de räknemässiga procedurer som ingår i denna. Speciellt eleganta är de problem i vilka gapet är som störst ty inga tal förekommer alls i formuleringen, som exempelvis problem 9 i samlingen nedan.

Eleven som problemlösare

Varje gång en elev löser ett problem helt på egen hand, växer denne. Denne tillägnar sig inte bara en fördjupad matematisk insikt, utan upplever intellektuell tillfredsställelse, som stärker självförtroendet och väcker förnyad nyfikenhet. En elev som misslyckas med att lösa ett problem och behöver få lösningen förklarad för sig, tillägnar sig naturligtvis mindre, men inte heller då har ansträngningen varit helt förgäves. Om inte annat underlättar det förståelsen av den presenterade lösningen; och även om inga framsteg alls har gjorts, så må den förelagda lösningen inspirera till framtida försök. Att lösa problem fyller inget syfte såvida inte eleverna verkligen önskar förstå och lösa dem av egen nyfikenhet istället för att bara tillfredsställa läraren eller för att få ett bra betyg.

Fantasi

Det skall också påpekas att de ryska skolproblemen, inklusive de som valts ut här, inte är praktiska i den meningen att de anknyter till elevens ofta begränsade vardag. Just vardagsanknytningen har blivit otillbörligt betonad av många moderna pedagoger. Några av nedanstående är uppenbarligen mer eller mindre fantastiska, andra involverar sagofigurer som Pippi Långström, som är mycket älskad av ryska barn. Även problem som tycks ha handfast vardagsanknytning har en skämtsam ton. Men i samtliga fall äger de entydiga lösningar givet av presenterad information. Alla dessa problem förstås utan vidare av barnen och stimulerar deras fantasi. De formuleras i vardagsspråkliga termer, vilket uppmanar barnen att använda sitt sunda förnuft. Barn är i allmänhet fascinerade av problem oavsett om de har praktiska tillämpningar eller ej.

Den ryska erfarenheten lär att man inte behöver vara matematiskt begåvad för att lösa sådana problem, de flesta normalbegåvade elever kan lösa dem. Det förbereder dem för nästa abstraktionsnivå, nämligen symbolisk manipulation som i algebran. Att lösa dessa problem kräver ingenting förutom klart tänkande och sunt förnuft. Ryska skolor förväntar sig detta av sina elever och dessa lever upp till förväntningarna. Vi är övertygade om att problemlösning är en av de mest fruktbärande sätten att utveckla barns tänkande.

19 utvalda problem

De flesta av problemen är tagna från de två vanligast förekommande läroboksserierna för den ryska motsvarigheten till låg- och mellanstadiet. Nämligen de två som är skrivna av Moro och Geidman med respektive medförfattare. Av dessa är Moros böcker mest använda, eftersom de är relativt konservativa och därmed mer i linje med vad de flesta lärare är vana vid. Geidmans läroböcker är något mera avancerade och därmed föredragna av mera ambitiösa lärare. Enligt uppgift användes Moros lärobokserie av 80 % av skolorna i Moskva, medan omkring 10 % väljer Geidmans. Men båda bokserierna har det gemensamt att de ansluter sig till den ryska traditionen, nämligen ett övermått av varierade problem. Den mest slående skillnaden mellan de moderna ryska läroböckerna och de gamla är att de nya har en mera attraktiv layout med färgbilder.

1 • Vintik och Shpuntik

Vintik och Shpuntik kom överens om att träffas vid den femte vagnen på tåget. Men Vintik gick till den femte vagnen framifrån medan Shpuntik gick till den femte vagnen räknat bakifrån. Hur många vagnar måste tåget ha för att de två vännerna skall träffas vid samma vagn?

2 • Schack

Igor och hans två vänner spelade schack. Var och en spelade två partier. Hur många partier spelades?

3 • Femmor

Alla tal från 1 till 99 skrevs i en rad efter varandra. Hur många gånger skrevs siffran 5?

4 • Häxor

Två häxor grälade. Vilket är snabbast: En kanonkula eller en sopkvast? De flög samma sträcka – 288 km. Häxan på kanonkulan tillryggalade sträckan på 4 timmar och häxan på sopkvasten på 3 timmar. Vilken hade högst hastighet, kanonkulan eller sopkvasten, och hur mycket skilde det?

5 • Trädgård

Villa Villerkulla är belägen i en trädgård i formen av en rektangel 26 meter bred och 40 meter lång. Huset upptar en 1/4 av ytan, och en 1/5 av ytan är täckt med blommor. På återstoden växer det träd. Hur stor är ytan av den trädbevuxna delen av trädgården?

6 • Tunnan

När det började regna satte Pippi ut en tom tunna under stuprännan. Tunnan rymmer 400 liter. Varje minut rinner det in 8 liter i tunnan, medan tre liter läcker ut genom olika sprickor och hål. Fylldes tunnan upp om regnade oavbrutet i 1 timme och 10 minuter?

7 • Bensintankar

Ett flygplan är försett med två bensintankar. Totalt rymmer dessa tankar 24 liter. Den första tanken innehåller fyra liter mera bensin än den andra. Hur många liter bensin finns det i var och en av tankarna?

8 • Nötter

En pojke och en flicka samlade ihop 24 nötter. Pojken plockade dubbelt så många nötter som flickan. Hur många plockade de var och en?

9 • Hur gammal var Ivan Tsarevich?

När Ivan Tsarevich anlände till det magiska landet, var Koschey lika gammal som Baba Yaga och Ivan Tsarevich tillsammans. Hur gammal var Ivan Tsarevich när Koschey var lika gammal som Baba Yaga var när Ivan Tsarevich kom till det magiska landet?

Ivan Tzarevich, Koschey och Baba Yaga är välkända för alla ryska barn från gamla folksagor.

10 • Bokbinderi

Ett bibliotek behöver binda 4 500 böcker. Ett bokbinderi kan binda alla dessa böcker på 30 dagar, och ett annat bokbinderi kan göra det på 45 dagar. Hur många dagar krävs för att binda alla böckerna, om båda binderierna arbetar samtidigt?

11 • Deniska och Mishka äter sylt

Deniska kan sätta i sig sylten ur en syltburk på 6 minuter. Mishka kan glupa i sig sylten ur en likadan syltburk dubbelt så snabbt. Hur lång tid skulle det ta dem att tömma en sådan burk tillsammans?

Deniska och Mishka är vanliga ryska smeknamn vilket passar in i problemets skämtsamma stil.

12 • Flottfärd

En båt som färdades medström mellan två hamnar gjorde sträckan på sex timmar, medan däremot återfärden tog åtta timmar. Hur lång tid skulle det ta för en flotte att flyta från den ena hamnen till den andra nedströms?

13 • Gåsflocken

Detta är ett gammalt problem.

En flygande gås mötte en gåsflock i luften och sade: "Hej hundra gäss". Flockens ledare svarade honom sålunda: "Vi är inte hundra. Men om vi vore så många som vi är och lika många till och hälften så många fler och en kvart så många mer och även du gås flögo med oss, då skulle vi vara hundra". Hur många gäss flög i flocken?

14 • Schackresultat

Tre vänner spelade schack så att varje par av dem spelade lika många partier. Därefter grälade de om vilken som vann. Den första sade: "Jag vann fler partier än någon av er andra". Den andre sade: "Jag förlorade färre partier än någon av er andra." Den tredje sade ingenting, men när alla poängen sammanräknades visade det sig att denne hade fler poäng än de två andra. Hur kan detta vara möjligt? (En seger ger en poäng, remi en halv poäng, och en förlust ger inga poäng.)

15 • Simtur på Neva

En man simmade uppströms i floden Neva. Under Republikanska bron tappade han en tom flaska. Tjugo minuter senare upptäckte han att han hade tappat den och simmade tillbaka för att leta reda på den. Han fann den vid Löjtnant Scmidts bro. Beräkna strömhastigheten om avståndet mellan dessa broar är 2 km.

16 • Soluppgång

Två gamla kvinnor steg upp vid soluppgången och började gå, var och en med sin konstanta hastighet. En gick från A till B, medan den andra gick i motsatt riktning från B till A. De möttes vid middagstid, klockan tolv, och fortsatte att gå utan uppehåll med oförminskade hastigheter. De anlände vid sina slutpunkter klockan fyra respektive klockan nio på eftermiddagen. Vid vilken tid steg solen upp denna dag?

17 • Slåtter

Ett gäng slåtterkarlar hade som uppgift att slå två ängar, en dubbelt så stor som den andra. Gänget spenderade en halv dag med att slå den större ängen. Därefter splittrade de sig. Hälften av dem stannade kvar på den stora ängen och slog den färdig på kvällen. Den andra halvan arbetade på den mindre ängen, men lyckades inte slå den färdig den dagen. Återstoden slogs av en av karlarna under loppet av den nästa dagen. Hur många slåtterkarlar var det från början?

18 • Vedförsäljaren

En man sålde ved. För att göra buntar av standardstorlek, så använde han alltid samma rep, virade det runt en packe vedkubbar och tog det på sin rygg. En kvinna bad honom att komma med en dubbel sats. Mannen gjorde som vanligt, men tog ett rep som var en och en halv gånger längre än hans vanliga. Kvinnan protesterade: "Eftersom jag betalade dubbelt så mycket, så borde du ha använt ett rep som var dubbelt så långt." Mannen däremot svarade: "Ni misstar er min fru. I själva verket har ni fått lite mera ved än ni betalat för." Vem av de två hade rätt?

19 • Riddarna runt bordet

$2n$ riddare anlände till Kung Arthurs hov, var och en hade inte fler än n-1 fiender bland de övriga. Bevisa att Arthurs rådgivare, Merlin, kan placera riddarna runt det runda bordet så att ingen sitter bredvid en fiende.

Kommentarer till problemen

Till varje problem avkrävs ryska skolbarn en lösning som en serie frågor besvarade av en räkneoperation. En mönsterlösning till problem 10 *Bokbinderi*, skulle kunna se ut så här:

Hur många böcker kan det första binderiet binda på 1 dag 150

Hur många böcker kan det andra binderiet binda på 1 dag? 100

Hur många böcker kan båda binderierna binda på 1 dag? 150 + 100 = 250

På hur många dagar kan båda binderierna binda alla böckerna? 4500 / 250 =1 8

Svar: De två bokbinderierna kan binda samtliga böcker på 18 dagar

---

Genom att räkna samtliga steg ser vi att detta är ett fyr-stegs problem (och således förväntas 10 – 11 åringar klara av det).

Raktframproblem

Problem 10, skulle kunna benämnas ett "raktframproblem" därför att det kan lösas rakt upp och ner, genom att man bara utför ett antal räkneoperationer, var och en med en uppenbar mening. Detta betyder dock inte att problemet är uppenbart. För många barn är det inte alls.

Trots sin enkelhet utgör raktframproblemen ett oundgänglig stadium i utvecklingen av varje barns matematiska kompetens. Och detta stadium i sin tur består av flera stadier med ett växande antal lösningssteg, och varje barn måste passera dessa som på en stege.

Icke-raktframproblem

Låt oss nu försöka klassificera icke-raktframproblemen. Några av dem hamnar i kategorin. "Finn två tal om du vet deras summa och differens." Problem 7, *Bensintankar,* tillhör den kategorin. Dessa problem tycks lämpliga för tredje och fjärdeklassare.

Naturligtvis skall inte denna typ av problem, liksom ingen annan typ av problem, drillas. Så snart som ett problem igenkännes som av en viss typ, så utgör det inte längre någon utmaning, och är således meningslöst att lösa såvida det inte utgör en del av ett mera utmanande problem.

Man skulle kunna tro att *Bensintankar* också skulle kunna klassificeras som ett rakframproblem. En mönsterlösning skulle kunna se ut så här

---

Hur mycket mera finns i den stora tanken? Fyra liter

Hur mycket skulle tankarna tillsammans rymma om man tog bort detta överskott från ena tanken så att bägge innehöll lika mycket bensin? 24 – 4 = 20

Hur mycket skulle då var och en av tankarna innehålla? 24 / 2 = 10

Hur mycket innehåller således tanken som inte fick någon bensin fråntagen? 10

Hur mycket innehöll den andra tanken således? 10 + 4 = 14

Problemet är dock att barnet i detta fall, till skillnad från i raktframproblemet, måste tidigare ha en översikt över hela problemet, innan de olika stegen kan formuleras.

Problem av delar

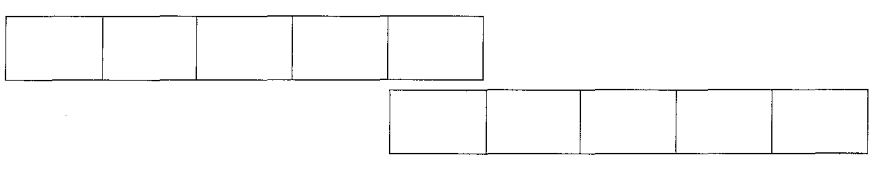
En annan kategori av icke-raktframproblem är "Finn två tal, om du vet deras summa och förhållande". I Ryssland har sådana problem ett speciellt namn *problem av delar,* därför att dessa kan lösas utan algebra genom att man introducerar "delar". Dessa problem är så välkända i Ryssland att en känd författare, Nasov, beskrev ett av dessa i sin bok *Vitya Maleev hemma och i skolan.* Hjälten, Vitya Malev, har just gått ut tredje klass. Han körde i matematik och lovade sin lärare att öva problem för att hinna i fatt. Så han försöker lösa problem 8 *Nötter* (från en lärobok för tredje klass från den tiden, d v s 1952).

Först delar Vitya 24 med två och erhåller 12. Kanske var och en samlade ihop 12 nötter? Nej, pojken samlade fler nötter än flickan. Vilsen ritar Vitya en teckning av en pojke och en flicka. För att uttrycka det faktum att pojken samlade fler nötter än flickan så ritar han två fickor på pojkens byxor, men bara en ficka på flickans förkläde. Sedan betraktar han sin teckning och ser framför sig tre fickor. Då slås han som av en blixt och inser att fickorna borde fyllas med nötter. Han borde dela antalet nötter med antalet fickor! Således erhåller han 24:3=8. Så varje ficka innehåller 8 nötter. Detta är lika många nötter som flickan har samlat. Pojken har två fickor, så han har 8 gånger 2 lika med 16 nötter. Nu kan Vitya kontrollera att svaret är riktigt. Han adderar 16 och 8 och får 24. Nu är han säker på att hans lösning är korrekt. Han är mycket glad. Han går ut på gatan för att berätta om sin upptäckt. En grannflicka påpekar att detta är ett problem för tredje klassen och att de löste dem förra året. Detta gör inte Vitya mindre glad, och det är bara rätt och riktigt. Han har gjort en alldeles egen upptäckt.

I USA skulle detta problem (liksom övriga i samlingen) anses vara ett tillgjort problem. Ett fingerat bluffproblem, därför att i verkliga livet skulle bägge barnen helt enkelt bara räknat sina nötter. Och Vitya då? En sådan elev skulle säkert ha satts i "vardagsmatematiklinjen" och troligen avskytt matematik för resten av livet.

Visualisera

Lösningen ovan visar hur viktigt det är att visualisera när man löser problem. Detta är knappast förvånande eftersom många uppslag inte alltid kan formuleras på ett verbalt tillfredställande sätt. Ett annat enkelt exempel på detta är problemet 1, *Vintik och Shpuntik,* där följande diagram gör det hela uppenbart:



Det finns många andra typer av problem. Och dessutom kan olika klassificeringsscheman överlappa varandra på olika sätt. Varje enskilt problem är specifikt, men de är alla till nytta för barnen, som steg i deras mognadsprocess. I den bästa av alla världar borde varje barn vid en viss ålder förstå hur man löser problem av tillräckligt många olika typer relevant för denna ålder, och ju mer oberoende desto bättre.

En vidareutveckling av "delarproblemet" lämpliga för klass 6–8 (12–14 åringar) är problem 13, *Gåsflocken.* Det är speciellt instruktivt att först lösa det med hjälp av "delar" utan att utnyttja algebra, och sedan att lösa det igen, med algebra.

Komplicerade problem

Låt oss nu behandla de mera komplicerade problemen. Dessa sönderfaller också i olika typer. Problem 12, *Flottfärd,* dök först upp i en bok skriven av Ya. I. Perelman, en berömd rysk didaktiker, och sedan i Moskvas matematiska olympiad 1940 för att ett par år senare inkluderas i en skolbok för femte och sjätte klass! Det är svårare än de föregående problemen och man skulle t o m kunna misstänka att problemet är olösbart. Vi bör inte förkasta denna inställning eftersom olösbara problem faktiskt finns och skolbarn skall föreläggas dem. (Ett typiskt sådant problem är det välkända om kaptenens ålder: En färja tar ett antal passagerare, tre åsnor, två gäss, ett spädbarn i en vagn ... Hur gammal är kaptenen?) Så det faktum att problem 12 är lösbart är slående och må leda till djupare reflektion. Ett sätt att undgå problemets skenbara olösbarhet är att introducera ett godtyckligt avstånd mellan de två hamnarna, säg 48 km, eftersom 48 är delbart med både 6 och 8.

Problemet som följer blir därmed ett raktframproblem. Vi inser lätt att när båten går medströms far den med en hastighet av

8 km/h, medan den motströms bara förmår 6 km/h. Varför är dessa hastigheter olika? Uppenbarligen på grund av strömmen. I det första fallet ökas båtens hastighet, i det andra minskas det. I bägge fallen med strömhastigheten. Således är strömhastigheten hälften av skillnaden mellan de två hastigheterna, dvs 1 km/h. Notera att eleverna antas vara helt införstådda med problem av typen "finn två tal med given summa och differens" och således fullt kapabla att fullständigt förstå och bemästra dem. Vi ser här hur en färdighet bygger på en annan. Flottens hastighet är lika med strömmens hastighet, nämligen 1 km/h. Så det kommer att ta 48 timmar för flotten att färdas distansen. Nu kan vi välja en annan distans, säg 24 km, och fortfarande få samma svar!

Detta indikerar att svaret är oberoende av distansen, så det går att lösa problemet utan att känna till den. För att göra lösningen fullständig bör man bekräfta denna indikation, t ex genom att införa en speciell enhet lika med avståndet mellan hamnarna.

Problem 10, *Bokbinderi,* visar sig också vara av samma typ om man inte ger totala antalet böcker. Problem 11, *Deniska och Mishka äter sylt,* är också av samma slag, men här är talen mindre, vilket gör det enklare. Eleverna må observera att under sex minuter kan de två gottgrisarna äta upp tre syltburkar tillsammans, således bör de kunna sluka en på två (= 6 : 3) minuter. Notera att eleverna, på grund av de enkla talen, inte någonsin behöver ha mött bråk, ännu mindre lärt sig hur man adderar dem.

Se de enkla väsentligheterna

Låt oss nu göra några allmänna kommentarer. Dessa problem handlar om "rates", förloppshastigheter, må så vara om hastigheter, eller bokbinderi eller syltätande. Det viktiga är att inse att "rates" adderas. Visst utgör detta förenklingar. Man kan argumentera att när bokbindarna börjar samarbeta så kanske de går i vägen för varandra, precis som de två gottgrisarnas skedar korsas som värjor och huvudena smäller ihop, och att "rates" inte skulle adderas. Och de som är välbekanta med den speciella relativitetsteorin vet att högre hastigheter inte adderas.

Sådana betänkligheter kan vara befogade i verkliga tillämpningar, men poängen är att dessa problem inte är menade att utgöra vardagstillämpningar. Det hela är en lek, och barn fattar lätt leken medan vuxna kan ha svårare för det. Matematiskt och vetenskapligt tänkande innebär alltid förenklingar, genom att det oväsentliga rensas bort. Denna förmåga att se de enkla väsentligheterna är kritisk i allt problemlösande, precis som i allt resonerande (jmfr James, 1890/1950, speciellt sidorna 329-360).

Vi vill återigen betona att lösningarna på problemen beror på underförstådda antaganden, som illustrerade ovan. I ett formellt matematiskt sammanhang borde dessa göras explicita, men själva poängen med dessa problem är att de inte är formella matematiska övningar, utan baserade på sunt förnuft, vilket utgör anknytningen till elevens värld. De problem elever har med elementär matematik beror inte på att matematik är något främmande språk. Matematik är inget språk, det är klart tänkande i vilket som helst språk som man råkar vara förtrogen med.

För ett något mera involverat problem som behandlar addition av hastigheter kan vi betrakta problem 15, *Simtur på Neva.* Detta problem visar styrkan i den fysiska idén om relativ rörelse. Låt oss placera oss i det system som följer med strömmen. I detta system är flaskan i vila så fort den är tappad och simmaren först simmar iväg ifrån den, för att senare simma tillbaka. Simmarens simhastighet antas konstant, så det tar lika lång tid för honom att simma i bägge riktningarna i det medflytande systemet. Ena vägen tog 20 minuter, så den andra vägen måste också ha tagit tjugo minuter, vilket innebär att flaskan var borttappad under 40 minuter. Om vi nu återvänder till det fasta systemet, dvs med avseende på stranden, finner vi att det tog 40 minuter för flaskan att flyta fram från en bro till den andra, dvs 2 km. Strömhastigheten är 2 km dividerat med 2/3 timmar, dvs 3 km/h. Och det barn som inte vill dividera med bråk kan observera att på 20 minuter så flöt flaskan 1 km, således 3 km på en timme.

Från skol- till olympiadproblem

Låt oss nu betrakta de mest komplicerade problemen i vår samling. Låt oss börja med problem 16, *Soluppgång*. Detta kan man lösa på många olika sätt, ett sätt är att rita ett diagram med avståndet till A och tid såsom koordinater och utnyttja trianglars likformighet. Vladimir Arnold, en berömd rysk matematiker, betonar att lösandet av detta problem vid tolv års ålder utgjorde hans första verkliga matematiska erfarenhet. Han använder ord som *uppenbarelse* och *upptäcktshänförelse* för att beskriva denna erfarenhet, och påstår att i Ryssland var sådana upplevelser inte ovanliga för unga skolelever.

Problem 17, *Slåtter*, härstammar från 1800-talet, och det sägs att Leo Tolstoi, den välkände ryske författaren som var mycket engagerad i utbildningsfrågor, tyckte om det. Det kan också lösas utan algebra. Som med så många andra problem kan en visualisering vara till stor hjälp.

Låt oss nu se på de geometriska problemen. Först problem 18, *Vedförsäljaren*. För att lösa det må vi göra vissa förenklingar. Vedknippet omvirat av repet kan vi betrakta som en cylinder, vars höjd är längden på vedklabbarna, och basens omkrets är lika med repets längd. Eftersom cylinders höjd är konstant så är dess volym proportionellt mot basens area, vilket i sin tur är proportionellt mot radien i kvadrat, eller ekvivalent omkretsens i kvadrat. Så om repets längd är multiplicerat med 3/2 så är volymen ved multiplicerat med kvadraten, dvs 9/4 som faktiskt är något mera än 2. Mannen hade rätt.

När vi närmar oss de svårare problemen förflyttar vi oss naturligt från skolproblem till matematiska olympiadproblem. I Ryssland föreligger inget gap däremellan: svåra skolproblem är nästan som olympiadproblem. Problem 12, *Flotten*, utgjorde ett exempel på detta. Å andra sidan gränsar olympiadproblem till universitetsmatematiken.

Om man skulle vilja introducera grafteori för barn, så finns det ingen anledning att börja med involverad terminologi och definitioner. Istället kan man ge dem ett problem som 19, *Riddarna runt bordet*. Detta problem föreslogs för den 27 Moskvaolympiaden, men det var oanvändbart i sin ursprungliga form:

> En graf har $2n$ noder, och varje nod tillhörande åtminstone n kanter. Visa att denna graf har en hamiltonisk cykel.

En av oss (A T) föreslog att man skulle presentera den hamiltonska cykeln med det legendariska runda bordet, och i denna form var problemet acceptabelt. Därefter diskuterades det i matematiska cirklar, där riddarna representerades av cirklar och vänskapsrelationer med linjer som sammanband dem. Således förvandlades diskussionen av ett lekfullt (men doch ursprungligen icke-trivialt) problem till ett studium av grafteori.

Utveckla tankeprocesser

Slutligen vill vi återigen betona att poängen med dessa problem inte är att lära sig metoder för att lösa dem. Det skall inte betraktas som självändamål, åtminstone inte ur ett vidare utbildningsperspektiv (fastän för eleverna själva när de försöker lösa dem är det viktigt att de har den attityden). Syftet är att utveckla tankeprocesser. Vägen är viktigare än målet. Således anser vi att man gör eleverna en björntjänst om man försöker lära dem problemlösningsstrategier. Ju mer oberoende en elev kommer fram till en lösning desto bättre. Det är mycket viktigt att deras upptäckter upplevs såsom verkligen deras egna. Se på historien om Vitya.

LITTERATUR

Berezanskaya, E. S. (1953). *Collection of problems and exercises in arithmetics. For 5th and 6th classes.* 20de upplagan. Moskva: Uchpedgiz. (på ryska)

Geidman, B. P. et al. (2004). *Mathematics. 4th grade. First half-year.* Moskva. (på ryska)

Larichev, P. A. (1961). *Collection of problems in algebra. Part I for 6–8 grades.* Moskva: Uchpedgiz. (på ryska.)

Moro, M. I. et al. (2004). *Mathematics. Textbook for the fourth grade of elementary school in two parts. Part 2 (Second half-year).* Moskva: Prosveshenie. (på ryska)

Perelman, Ja. I. (2001). *Amusing problems.* Moskva. (på ryska)

James, W. (1890/1950). *Principles of Psychology.* Dover Inc. (även senare utgåvor finns, se t ex Libris sökningstjänst)