М. Л. ЦЕТЛИН

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ АВТОМАТОВ И МОДЕЛИРОВАНИЮ БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

6П2.154
Ц 53
УДК 519.95

Цетлин М. Л., **Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем,** Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1969, 316 стр.

Книга составлена из основных работ выдающегося советского специалиста в области кибернетики М. Л. Цетлина.

Первая часть книги посвящена математическому моделированию простейших форм целесообразного поведения. Излагается теория игр автоматов. Отыскивается конструкция достаточно универсального автомата, обеспечивающего выигрыш в широком классе игр. Приводятся примеры таких конструкций. Вторая часть содержит очерки о биологических системах и математических моделях в биологии, а также работу о биоэлектрическом управлении и диагностике состояний. Третья часть содержит две дополнительные математические работы.

Книга дополнена библиографией работ М. Л. Цетлина, а также изложением вопросов, поставленных им в устной форме.

Табл. 19. Илл. 48. Библ. 197 назв.

Михаил Львович Цетлин

Исследования по теории автоматов
и моделированию биологических систем

М., 1969 г., 316 стр. с илл.

Редакторы *М. Б. Беркинблит, А. Л. Тоом*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *Е. А. Белицкая, И. Б. Мамулова*

Сдано в набор 27/V 1969 г. Подписано
к печати 10/XI 1969 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$.
Физ. печ. л. 9,875+1 вкл. Условн. печ. л. 16,69.
Уч.-изд. л. 15,68. Тираж 5000 экз. Т-15910.
Цена книги 1 р. 17 к. Зак. № 1007

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 16 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Москва, Трехпрудный пер., 9

$\frac{2-2-4}{142-69}$

ОБ УПРОЩЕННОМ ОПИСАНИИ ИГР АСИМПТОТИЧЕСКИ-ОПТИМАЛЬНЫХ АВТОМАТОВ *)

1. **Игры с двумя участниками.** Для определения поведения простейших автоматов в играх очень полезным оказалось отказаться от детального расчета марковской цепи, описывающей игру автоматов, и перейти к исследованию суммарных характеристик, например, среднего времени, в течение которого автомат совершает некоторое действие. Первые попытки в разработке этого направления принадлежат В. А. Пономареву, который использовал понятие среднего времени для расчета симметрической игры двух автоматов с линейной тактикой.

Этот подход оказался очень удобным для игр автоматов с нулевой суммой. В работах В. И. Кринского [103, 104] указан способ определения предельного выигрыша в таких играх, когда участниками являются асимптотически-оптимальные конструкции автоматов типа L, D, K и похожие на них (см. стр. 27 и далее настоящего издания).

Асимптотическая оптимальность этих конструкций основана на том, что среднее время $T_{A_n}(a_i)$, в течение которого автомат A_n совершает действие i, оказывается тем больше, чем больший выигрыш a_i он при этом получает (при больших n).

Точнее, необходимо учитывать начальное состояние $\varphi(n)$, в котором в исходный момент находился автомат A_n, и говорить о среднем времени $T_{A_n}^{\varphi(n)}(a)$. Однако для этих автоматов величина выигрыша a оказывается существеннее, чем начальное состояние $\varphi(n)$. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — асимптотически-оптимальная

---

*) Написано В. И. Крипским, И. И. Пятецким-Шапиро и А. Л. Тоомом. (*Прим. сост.*)

последовательность таких автоматов и $a_1 > a_2$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_{An}^{\varphi(n)}(a_1)}{T_{An}^{\psi(n)}(a_2)} = \infty \tag{1}$$

при любых начальных состояниях $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ автоматов A_n. Это основное свойство и позволяет определить выигрыш в игре с нулевой суммой.

Сначала рассмотрим пример. Пусть играют одинаковые автоматы, и матрица игры с нулевой суммой такова:

$$\begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

В партии (1,1) выигрыш 1-го автомата (0,3) больше, чем 2-го — (—0, 3). При таких выигрышах в стационарной случайной среде среднее время до смены действия 2-м автоматом значительно меньше, чем среднее время до смены действия 1-м автоматом. Поэтому естественно ожидать, что и в игре при таких выигрышах 2-й автомат сменит действие раньше, чем 1-й, и автоматы от партии (1,1) перейдут к партии (1,2). В партии (1,2) выигрыш 1-го автомата уже меньше, чем 2-го, теперь раньше сменит действие 1-й автомат, и автоматы перейдут к партии (2,2). Далее смена действий будет происходить следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} 0{,}3 & \longrightarrow & -0{,}1 \\ \uparrow & & \downarrow \\ -0{,}4 & \longleftarrow & 0{,}2. \end{array}$$

Среднее время τ_{ij}, в течение которого автоматы разыгрывают партию (i, j), определяется тем из автоматов, который в этой партии получает меньший выигрыш. Поэтому $\tau_{1,1} \sim T_A(-0,3)$, $\tau_{1,2} \sim T_A(-0,1)$, $\tau_{2,1} \sim T_A(-0,4)$, $\tau_{2,2} \sim T_A(-0,2)$. Тогда из (1) следует, что партия (1, 2) разыгрывается значительно дольше, чем остальные, и она вносит наибольший вклад в выигрыш. Естественно ожидать, что выигрыш 1-го автомата в такой игре близок к —0,1 (это элемент из матрицы игры, ближайший к нулю).

Описанная выше качественная картина поведения автоматов оказывается не очень далекой от истинной. В [104] описан класс S автоматов, для которых можно определить выигрыш в играх с нулевой суммой. Эти автоматы удовлетворяют условию (1) и еще двум дополнительным требованиям. Предельное поведение этих автоматов в игре может быть определено по автоматной цене d. Автоматная цена для пары асимптотически-оптимальных последовательностей автоматов $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ и $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ из этого класса определяется следующим образом. Среднее время $T_{B_n}(a)$ для автомата B при достаточно большом n есть монотонно возрастающая функция от a, а $T_{B_n}(-a)$ — монотонно убывающая функция от a. Пусть при $a = d(n)$ имеет место равенство

$$T_{An}(d(n)) = T_{Bn}(-d(n)). \tag{2}$$

Предел $d(n)$, при $n \to \infty$ (если он существует) называется автоматной ценой d. Автоматная цена d тем больше, чем менее «инерционна» конструкция A, т. е. меньше времени $T_A(a)$, и более инерционен ее противник B. Для одинаковых автоматов $d = 0$.

Справедлива следующая теорема. Пусть заданы две последовательности автоматов $A_1, \ldots, A_n, \ldots$, и $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ из класса S, асимптотически-оптимальные во всех стационарных случайных средах, и игра Г с нулевой суммой двух автоматов A_n и B_n. Тогда предельный выигрыш W автомата A заключен всегда между верхней V и нижней v ценами игры Г. Точнее говоря:

1) если игра Г такова, что автоматная цена $d \geqslant V$, то $W = V$;

2) если $v < d < V$, то предельный выигрыш W близок к d. Близость понимается в следующем смысле:

$$a_{i_1j_1} \leqslant W \leqslant a_{i_2j_2},$$

где

$$a_{i_1j_1} = \max_{a_{ij}<d} \{a_{ij}\}, \qquad a_{i_2j_2} = \min_{a_{ij}>d} \{a_{ij}\}$$

и элементы $a_{i_1j_1}$ и $a_{i_2j_2}$ удовлетворяют еще одному дополнительному ограничению;

3) если $d \leqslant v$, то $W = v$.

Однако к автоматам L эта теорема непосредственно неприменима, так как они асимптотически-оптимальны не на всех стационарных случайных средах. Если образовать стационарную случайную среду, выбирая выигрыши за действия из интервала $[-1, 1]$, то автоматы L могут и не оказаться асимптотически-оптимальными. Чтобы они были асимптотически-оптимальными, этот интервал необходимо сузить до $[0,1]$. Однако при игре с нулевой суммой невозможно, чтобы выигрыши обоих участников в каждой партии лежали внутри интервала $[0,1]$ (если только матрица игры не состоит из одних нулей). Для таких автоматов имеет смысл определить антагонистическую игру, аналогичную игре с нулевой суммой, так, чтобы выигрыши не выходили из $[0,1]$. Игра двух автоматов называется антагонистической игрой с суммой $\varkappa$, если математические ожидания выигрышей 1-го $a_{ij}^{(1)}$ и 2-го $a_{ij}^{(2)}$ автоматов в каждой партии (ij) связаны равенством

$$a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} = \varkappa.$$

При $\varkappa = 1$ выигрыш не выходит из $[0,1]$. Для антагонистических игр с суммой $\varkappa$ выигрыш также определяется приведенной теоремой, если вместо автоматной цены d ввести величину $d_\varkappa = \lim\limits_{n\to\infty} d_\varkappa^{(n)}$, где $d_\varkappa^{(n)}$ определяется из уравнения

$$T_{A_n}(d_\varkappa^{(n)}) = T_{B_n}(\varkappa - d_\varkappa^{(n)})$$

(ср. с (2)). Таким образом удается включить в общую схему и такие последовательности автоматов, которые являются асимптотически-оптимальными не во всех стационарных случайных средах.

Пример. Пусть автомат $D_{Mn,\,M}$ играет с автоматом $L_{mNn,\,N}$ (автоматы D и L имеют M и N действий соответственно, а число состояний на одном луче, соответствующих одному действию, у L в m раз больше, чем у D) в антагонистическую игру с суммой $\varkappa = 1$. Из выражения для среднего времени до смены действия можно найти автоматную цену $d_\varkappa$ при $\varkappa = 1$. Для автомата $L_{mNn,\,N}$

$$T_{L_{mNn,\,N}}(a) = \frac{2}{1-a}\,\frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}, \quad \text{где} \quad \lambda = \frac{1+a}{1-a}.$$

Для автомата $D_{Mn,\,M}$

$$T_{D_{Mn,\,M}}(a) = \left(\frac{2}{1-a}\right)^n.$$

$d_\varkappa$ зависит от соотношения объемов памяти m.

Одинаковому выигрышу обоих участников в игре с суммой 1 соответствует значение $d_\varkappa = 1/2$. Здесь это имеет место при отношении объемов памяти $m = \lg 4/\lg 3$.

Приведем и для других пар последовательностей автоматов отношения m объемов памяти, при котором в играх с суммой $\varkappa = 1$ эти автоматы играют одинаково:

$$\text{для } K_{Mn,\,M} \text{ и } L_{mNn,\,N} \quad m = \lg 7/\lg 3,$$
$$\text{для } K_{Mn,\,M} \text{ и } D_{mNn,\,N} \quad m = \lg 7/\lg 4.$$

На этих примерах можно увидеть, как увеличение инерционности (времени до смены действия $T(a)$) последовательности автоматов приводит к уменьшению ее выигрыша. Видно, что «игровые способности» рассматриваемых здесь конструкций L, D, K автоматов различаются незначительно: для того чтобы они играли в точности одинаково, необходимое соотношение объемов памяти (определяющее инерционность) во всех случаях не должно превосходить двух.

2. Замечание об играх с любым числом участников. Аналитическое исследование игр автоматов из асимптотически-оптимальных последовательностей или, сокращенно говоря, игр асимптотически-оптимальных автоматов, очень трудно и почти ни в одном случае не проведено полностью. В значительной степени трудности связаны с тем, что эти игры описываются марковскими цепями, в которых число состояний быстро растет при увеличении индивидуальной памяти автоматов. В связи с этим М. Л. Цетлин интересовался задачей упрощенного описания таких марковских цепей, в частности, отысканием марковской цепи, число состояний в которой не стремится к ∞, и которая давала бы представление об истинном ходе игры.

Возможно, что этими свойствами обладает марковская цепь, которая строится следующим образом. Пусть у нас есть игра K с независимыми исходами (см. стр. 58) ν игроков-автоматов $\mathfrak{A}^1, \ldots, \mathfrak{A}^\nu$. Предположим, для простоты, что каждый автомат имеет только два действия: f_1 и f_2.

Обозначим через $p_i(f)$ вероятность проигрыша (штрафа) i-го игрока, если в предыдущий момент времени набор действий, совершенных игроками, был равен $f = \{f_{j_1}, \ldots, f_{j_\nu}\}$.

Такая игра, очевидно, описывается марковской цепью, число состояний которой равно произведению чисел состояний всех участвующих автоматов.

Например, если каждый автомат имеет $2n$ состояний, то число состояний цепи равно $(2n)^{\nu}$.

Пусть заданы автоматы $\mathfrak{A}^i, \ldots, \mathfrak{A}^{\nu}$ — участники игры К. Как мы уже говорили, речь идет об асимптотически-оптимальных автоматах.

Все описанные на стр. 27—32 этой книги конструкции автоматов обладают одним свойством: они при больших n подолгу делают одно и то же действие. Поэтому и каждый набор действий f делается по много раз подряд. В течение всего этого времени каждый атомат $\mathfrak{A}^i$ как бы помещен в стационарную случайную среду, в которой вероятность штрафа равна $p_i(f)$.

Для автомата $\mathfrak{A}^i$, помещенного в стационарную среду с вероятностью штрафа $p_i(f)$, обозначим через $T(\mathfrak{A}_i, f_{j_i}, p_i(f))$ среднее время, в течение которого он делает подряд действие f_{j_i}. Это среднее время легко сосчитать для всех предложенных на стр. 27—32 конструкций автоматов.

Новая марковская цепь имеет 2^{ν} состояний, обозначаемых наборами $f = \{f_{j_1}, \ldots, f_{j_\nu}\}$, где каждый индекс j_m равен 1 или 2.

Вероятность перехода из состояния $f_1 = \{f_{j_1}, \ldots, f_{j_\nu}\}$ в состояние $f_2 = \{f_{k_1}, \ldots, f_{k_\nu}\}$ равна $\prod_{m=1}^{\nu} \tau_m$, где

$$\tau_m = \begin{cases} 1/T(\mathfrak{A}_m, f_{j_m}, p_m(f_1)), & \text{если} \quad j_m \neq k_m, \\ 1-1/T(\mathfrak{A}_m, f_{j_m}, p_m(f_1)), & \text{если} \quad j_m = k_m. \end{cases}$$

По мысли М. Л. Цетлина поведение этой марковской цепи при $n \to \infty$ сходно с поведением первоначальной марковской цепи, описывающей игру автоматов.