АКАДЕМИЯ НАУК СССР

АКАДЕМИЯ НАУК ГрССР

# ПЯТЫЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ СИМПОЗИУМ ПО ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

## ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

# THE FIFTH INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON INFORMATION THEORY

## ABSTRACTS OF PAPERS

Часть II

К – Я

МОСКВА – ТБИЛИСИ

1979

## РЕШЕТЧАТЫЕ СИСТЕМЫ С ЛОКАЛЬНЫМИ ЗАПРЕТАМИ

А.Л.Тоом

(СССР)

Вводится и исследуется понятие вероятностной устойчивости для конфигураций на целочисленных решетках.

Каждая точка $d$ -мерной целочисленной решетки $Z^d$ принимает состояния из непустого конечного множества $X_0$ одинакового для всех точек. Получается пространство $X=X_0^{Z^d}$ конфигураций на всей решетке. Каждой точке $V\in Z^d$ соответствует сдвиг решетки на вектор $V$ и индуцированный сдвиг $T_V$ пространства $X$.

Пусть задан непустой конечный набор $\{C_1,\dots,C_m\}$ собственных цилиндрических подмножеств $X$. Назовем запретами все трансляты множеств $C_1$, ..., $C_m$, а множество всех запретов назовем ансамблем $E$:

$$E=\{T_V(C_i),\ 1\le i\le m,\ V\in Z^d\}.$$

Итак, задана система $(E, X)$. Назовем конфигурацию согласованной, если она принадлежит всем запретам.

Пусть $M$ - совокупность вероятностных мер на $X$. Для каждого числа $\varepsilon\in[0;1]$ определим подмножество $M_\varepsilon\subset M$. Мера $\mu$ входит в $M_\varepsilon$, если для всякого натурального $k$ и всяких $k$ различных запретов $A_1$, ..., $A_k$ выполняется следующее:

$$\mu(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_k)\ge 1-\varepsilon^k.$$

Для любой конфигурации $X$ и точки $V$ обозначим через $N_V(X)$ совокупность конфигураций, отличающихся от $X$ на конечном множестве точек, включающем $V$. Назовем согласованную конфигурацию $X$ устойсивой, если

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\substack{\mu\in M_\varepsilon \\ v\in Z^d}} \mu(N_v(x))=0$$

Без потери общности можно считать, что ансамбль $E$ порожден набором $\{C_1\}$, состоящим из одного множества.

Результаты:

I. В каждой одномерной системе не более одной устойчивой конфигурации. Точнее, согласованная конфигурация в одномерной системе устойчива, если и только если она - единственная согласованная конфигурация в этой системе. Поскольку легко указать алгоритм, полностью описывающий согласованные конфигурации во всех одномерных системах, то и устойчивые конфигурации в одномерных системах полностью описываются.

2. Напротив, в неодномерных системах устойчивые конфигурации могут быть неединственны. Для любого конечного набора периодических конфигураций в пространстве $X$ на неодномерной решетке строится система $(E,X)$, в которой все конфигурации из данного набора и их трансляты устойчивы, а все прочие конфигурации несогласованы.

Доказаны некоторые достаточные условия устойчивости. Введем обозначения, нужные, чтобы их сформулировать. Пусть имеется $d$ -мерная системе $(E,X)$ и в ней конфигурация $y$. Множество $V\subset Z^d$ назовем гарантом для $y$, если для всякой точки $v$ найдется такое конечное семейство запретов

$\{A_1, A_2, \dots, A_k\}\subset E$, что

$$\{x : x_v \neq y_v \; ; \; x_{V+v} = y_{V+v}\} \cap A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k = \emptyset.$$

Кроме того, погрузим $Z^d$ в евклидово пространство $R^d$ с тем же началом координат 0. Точки $R^d$ отождествляем с векторами. Вектора единичной длины называем направлениями. Множество точек $Z^d$, образующих отрицательные скалярные произведения с направлением $\omega$, обозначаем $\Pi(\omega)$. Назовем направление $\omega$ когарантным, если $\Pi(\omega)$ есть гарант.

3. Пусть дана система $(E,X)$ и в ней периодичеcкая согласованная конфигурация $y$. Пусть имеется такой набор направлений $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$, что:

а) Существуют такие положительные $P_0, P_1, \ldots, P_n$, что

$$P_0 \omega_0 + P_1 \omega_1 + \ldots + P_n \omega_n = 0$$

б) $\Pi(\omega_0) \cap \Pi(\omega_K)$ есть гарант для $Y$ при всяком $K$ от I до $n$.

Тогда $Y$ устойчива.

4. Если в двумерной системе множество когарантных направлений для периодичеcкой согласованной конфигурации $Y$ содержит дугу, составляющую более половины окружности, то конфигурация $Y$ устойчива.

Очевидно, ценность утверждений об устойчивости конфигураций обусловлена богатством множеств $M_\varepsilon$. Поэтому строятся примеры мер $\mu \in M_\varepsilon$. Наиболее естественные примеры относятся к тому случаю, когда система описывает функционирование $(d-1)$ - мерной однородной сети конечных автоматов в дискретном времени, где каждый автомат вычисляет свое состояние в каждый момент времени как функцию от состояний соседей в его конечной окрестности в несколько предыдущих моментов времени и при этом случайно ошибается с вероятностью $\varepsilon$, причем все ошибки независимы друг от друга. Конфигурация - это реализация работы всех автоматов за все время от $-\infty$ до $+\infty$. Она согласована, если не произошло ни одной ошибки. Она устойчива, если отклонения от нее, обусловленные ошибками, накапливаются лишь до величины, стремящейся к нулю вместе с $\varepsilon$. К сожалению, в применении к автоматным системам наши основные результаты 3 и 4 правращаются в уже известные результаты работ [I] и [2]. Но существуют и более сложные примеры мер $\mu \in M_\varepsilon$, для которых наши результаты являются новыми.

Утверждение I очевидно и приведено для ясности. Утверждение 2 доказывается известным контурным методом Пайерлса в его стандартной форме. Утверждения 3 и 4 доказываются довольно громоздкими вариантами этого метода, похожими на те, что опубликованы в [I, 2].

## Литература

1. А.Л.Тоом. Нагрузочные многомерные системы автоматов. Проблемы передачи информации, 10, 3, 70–79, 1974 .

2. А.Л.Тоом. Устойчивые и притягивающие траектории в многокомпонентных системах. Сборник "Многокомпонентные случайные системы" , 288–308 . "Наука", М., 1978.