УСТОЙЧИВЫЕ И ПРИТЯГИВАЮЩИЕ ТРАЕКТОРИИ В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМАХ

А. Л. Тоом

Эта статья содержит группу взаимосвязанных результатов о многокомпонентных системах с локальным взаимодействием при наличии малого случайного «шума». Хотя многие понятия вводятся здесь в новой форме, по существу, эта статья продолжает направление, представленное, например, в работах [1—3].

§ 1. Основные определения

В данной статье V обозначает счетное множество, элементы которого называются точками. Каждой точке $a \in V$ сопоставлено конечное множество $U(a) \subset V$. Для любого $A \subset V$ обозначим

$U(A) = \bigcup_{a \in A} U(a)$, а также $U^{k+1}(A) = U(U^k(A))$, где $U^0(A) = A$ и $U^\infty(A) = \bigcup_{k=0}^{\infty} U^k(A)$. Предположим, что

$$\forall a \in V \, \exists k : U^k(a) = \varnothing, \tag{1}$$

и назовем глубиной точки a максимальное k, для которого $U^k(a)$ непусто. Точка a называется граничной, если $U(a)$ пусто, и внутренней, если $U(a)$ непусто. Совокупность всех граничных точек называется границей и обозначается W.

Пусть теперь каждой точке $a \in V$ сопоставлено конечное множество X_a. Обозначаем $X_A = \prod_{a \in A} X_a$. Элементы множеств X_a, X_A называются состояниями точки a и множества A и обозначаются x_a, x_A, где x_A задается набором своих компонент x_a, $a \in A$. Множество X_V обозначаем X, а его элементы x называем просто состояниями, состояния же x_W границы — базами. Очевидно, база x_W есть сужение состояния $y \in X$, если $x_a = y_a$ при всех $a \in W$.

Пусть для каждой внутренней точки a задано отображение $\varphi_a : X_{U(a)} \to X_a$. Состояние $x \in X$ называем траекторией, если $x_a = \varphi_a(x_{U(a)})$ для всех внутренних a. Благодаря условию (1), каждой базе x_W соответствует единственная траектория, сужение которой на W есть x_W. Эту траекторию обозначим $\mathrm{tr}(x_W)$. Действительно, если x_W дано, то все компоненты $\mathrm{tr}(x_W)$ определяются индуктивно, в порядке возрастания глубины. Всю описанную здесь конструкцию назовем комбайном. Итак, комбайн задается множеством V, пространством X, а также системой множеств $U(a)$ и отображений $\varphi_a(\cdot)$, причем (1) предполагается.

Перейдем теперь к основному определению устойчивой траектории. Пусть M — совокупность всех нормированных мер на σ-алгебре, порожденной всеми цилиндрическими подмножествами X, и ε — параметр, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Каждому значению ε сопоставим подмножество $\mathrm{M}_\varepsilon \subset \mathrm{M}$. Мера $\mu \in \mathrm{M}$ входит в M_ε, если для любого конечного $A \subset V$ $\mu(x_a \neq \varphi(x_{U(a)})$ при всех $a \in A) \leqslant \varepsilon^{|A|}$. Здесь и ниже $|A|$ означает число элементов в произвольном конечном множестве A. Каждой базе x_W сопоставим подмножество $\mathrm{M}(x_W) \subset \mathrm{M}$. Мера $\mu \in \mathrm{M}$ входит в $\mathrm{M}(x_W)$, если проекция μ на X_W есть δ-мера, сосредоточенная в состоянии x_W. И, наконец, через $\mathrm{M}_\varepsilon(x_W)$ обозначим пересечение $\mathrm{M}_\varepsilon(x_W) = \mathrm{M}_\varepsilon \cap \mathrm{M}(x_W)$.

Определение 1. *Траектория* $y = \operatorname{tr}(y_W)$ *называется устойчивой, если*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\substack{\mu\in M_\varepsilon(y_W)\\ a\in V}} \mu(x_a \neq y_a) = 0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Задан комбайн и в нем состояние* y. *Пусть имеются такие* n *действительных функций* $L_1(\cdot), \ldots, L_n(\cdot)$ *на* V *и такие два числа* $r > 0$, $R > 0$, *что следующие четыре условия выполняются для любых точек* a, b *любого* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *и любого* $x_{U(a)} \in X_{U(a)}$:

1) $|U(a)| \leqslant R$; $\quad |\{c : a \in U(c)\}| \leqslant R$,

2) $b \in U(a) \Rightarrow |L_k(b) - L_k(a)| \leqslant 1$,

3) $\sum\limits_{i=1}^{n} L_i(a) = 0$,

4) $\varphi_a(x_{U(a)}) \neq y_a \Rightarrow \exists c \in U(a)\,(x_c \neq y_c;\ L_k(c) - L_k(a) \geqslant r)$.

Тогда y *есть устойчивая траектория.*

Тот факт, что y есть траектория, очевиден, и будем считать его доказанным. Устойчивость y докажем в § 2. Эта теорема обобщает результат и метод доказательства работы [1]. Основным стимулом к ее появлению послужила «задача голосования» [2], которая будет описана в § 3 как пример 1.

Дадим определение притягивающей траектории и проиллюстрируем его простой теоремой.

Определение 2. *Траектория* y *называется притягивающей, если для любой траектории* x *верно следующее: если множество* $\{a \in W : x_a \neq y_a\}$ *конечно, то и множество* $\{a \in V : x_a \neq y_a\}$ *тоже конечно.*

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 траектория* y *притягивающая.*

Доказательство. Пусть траектория x такова, что множество $A_0 = \{a \in W : x_a \neq y_a\}$ конечно. Обозначим $A_m = \{a \in V : U^m(a) \cap A_0 \neq \varnothing\}$, $m = 1, 2, \ldots$ Все A_m конечны, так как $|A_m| \leqslant |A_0| \cdot R^m$. Ясно, что $\{a \in V : x_a \neq y_a\} \subset \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} A_m$. Докажем теорему, подобрав такое M, что $\{a \in V : x_a \neq y_a\} \subset \bigcup\limits_{m=0}^{M} A_m$.

Положим

$$M = \left[(nr)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \max_{a\in A_0} L_i(a) + 1\right].$$

Допустим, что существует точка $a \notin \bigcup_{m=0}^{M} A_m$, в которой $x_a \neq y_a$. Из условия 4 теоремы 1 следует, что для любого k от 1 до n найдется последовательность точек $a_0 = a, a_1, a_2, \ldots, a_Q \in W$, такая, что $L_k(a_q) - L_k(a_{q-1}) \geqslant r$ и $x_{a_q} \neq y_{a_q}$ для каждого q от 1 до Q. Отсюда $a_Q \in A_0$ и $L_k(a_Q) \geqslant L_k(a_0) + Qr$. При этом $Q > M$, поскольку $a \notin \bigcup_{m=0}^{M} A_m$. Итак, $\max_{b \in A_0} L_k(b) > L_k(a) + Mr$, откуда $\sum_{k=1}^{n} \max_{b \in A_0} L_k(b) > Mrn$. Это неравенство противоречит нашей формуле для M, что доказывает теорему.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Доказательство разбито на четыре части, первые три из которых вспомогательные.

I. Обозначим $N = \{1;\ 2;\ \ldots;\ n\}$, где n — число функций $L_1(\cdot), \ldots, L_n(\cdot)$ в формулировке теоремы. Будем называть *полюсником* π на множестве A любое отображение $\pi : N \to A$. Образ числа $k \in N$ при отображении π назовем k-м *полюсом* полюсника π и обозначим через $\pi(k)$. Область значений π обозначим $\pi(N)$. Соответственно $\pi(N') = \{\pi(k),\ k \in N'\}$ для любого $N' \subset N$. Протяженностью полюсника π на V назовем величину $\sum_{k=1}^{n} L_k(\pi(k))$.

Полюсник π на множестве A вершин графа g называется реберником на g, если $\pi(N) = \{a;\ b\}$ и вершины a, b графа g соединены в нем ребром. Говоря о графах, считаем, что концы ни одного из ребер не совпадают. Всюду, где не оговорено противное, считаем, что каждые две вершины a, b соединены не более чем одним ребром, обозначаемым в этом случае через $(a,\ b)$.

Основную роль здесь играют полюсники на V следующих двух специальных типов. Назовем полюсник π на V *стрелкой*, если $\pi(N) = \{a;\ b\}$, причем $a \in U(b)$, и существует такое $k \in N$, что $\pi(k) = a$, $\pi(N \setminus k) = b$ и $L_k(a) - L_k(b) \geqslant r$. Назовем полюсник π на V *вилкой*, если $\pi(N) = \{a,\ b\} \subset U(c)$, где $a \neq b$, $c \in V$. Можно ввести граф γ с множеством вершин V, в котором a, $b \in V$ соединены ребром, если $a \in U(b)$ или $\exists c : \{a,\ b\} \subset U(c)$. Как стрелки, так и вилки являются реберниками на γ. Ясно, что из каждой вершины графа γ выходит не более чем $R^2 + 2R$ ребер.

Пусть имеются две последовательности полюсников на каком-то множестве A. Назовем эти последовательности эквивалентными, если одна может быть получена из другой перестановкой членов.

Тогда все последовательности полюсников на A разбиваются на классы эквивалентности, которые будем называть **пучками.** Будем записывать пучок в виде любой из последовательностей, входящих в его класс эквивалентности:

$$\Pi=(\pi_1, \ldots, \pi_m).$$

Существует пустой пучок, в котором нет ни одного полюсника. Для любого пучка $\Pi=(\pi_1, \ldots, \pi_m)$ обозначаем $\Pi(N)=\bigcup\limits_{k=1}^{m} \pi_k(N)$. Если даны два пучка $\Pi^1=(\pi_1^1, \ldots, \pi_l^1)$ и $\Pi^2=(\pi_1^2, \ldots, \pi_m^2)$, то через $\Pi^1 * \Pi^2=(\pi_1^1, \ldots, \pi_l^1, \pi_1^2, \ldots, \pi_m^2)$ обозначаем пучок, полученный приписыванием одной последовательности к другой.

Пучок $\Pi=(\pi_1, \ldots, \pi_m)$ на A назовем *p-ровным* или просто ровным на подмножестве $B \subset A$, если для любого $k \in N$ ро́вно p членов последовательности $\pi_1(k), \ldots, \pi_m(k)$ принадлежат B. Пучок Π на A назовем всюду ровным на $B \subset A$, если он ро́вен на каждом подмножестве множества B. Пучок Π на A назовем всюду ровным, если он всюду ровен на A.

Пусть пучок $\Pi=(\pi_1, \ldots, \pi_m)$ на V состоит только из реберников на графе γ, введенном выше. Тогда сопоставим ему граф $\gamma(\Pi)$ с m ребрами и множеством вершин $\Pi(N)$. Каждому ребернику π_l, $1 \leqslant l \leqslant m$ взаимно однозначно соответствует ребро в $\gamma(\Pi)$, соединяющее те две точки a, b, которые входят в $\pi_l(N)$. (Здесь две вершины могут быть соединены несколькими ребрами.) Назовем такой пучок связным, если соответствующий ему граф $\gamma(\Pi)$ связен.

Лемма 1. *Если пучок на V всюду ровен, то сумма протяженностей входящих в него полюсников равна нулю.*

Доказательство очевидно.

Лемма 2. *Пусть всюду ровный пучок на V состоит из k стрелок и l вилок.*

Тогда $rk \leqslant 2nl$.

Доказательство. Протяженность всякой стрелки не меньше r. Протяженность всякой вилки по модулю не больше $2n$. Отсюда сумма протяженностей нашего пучка не меньше чем $rk - 2nl$. Но по лемме 1 эта сумма равна нулю, откуда следует требуемое.

Лемма 3. *Пусть фиксирована точка $v \in V$. Количество различных связных пучков Π на V, состоящих из m реберников на γ, и таких, что $v \in \Pi(N)$, не больше чем $[2^n(R^2+2R)]^{2m}$.*

Доказательство. Известно, что во всяком связном графе есть замкнутый путь, проходящий по каждому ребру дважды. Выберем такой путь в графе γ (П) для каждого пучка П, о котором говорится в лемме, считая v началом этого пути. Закодируем каждый из наших пучков П последовательностью, состоящей из $2m$ символов. Каждый символ кодирует один полюсник, и их порядок совпадает с порядком прохождения соответствующих им ребер в выбранном пути.

Оценим, сколько вариантов достаточно иметь каждому символу, чтобы по последовательности можно было однозначно восстановить пучок. Пусть уже определены полюсники, соответствующие начальному куску пути, кончающемуся в точке a. Чтобы определить следующий полюсник, достаточно знать следующее: 1) по какому ребру графа γ, выходящему из a, идет дальше путь (это дает не более R^2+2R вариантов); 2) как полюса следующего полюсника распределены между концами этого ребра (это дает меньше чем 2^n вариантов).

Итак, всего достаточно $2^n\,(R^2+2R)$ вариантов на каждый символ. Тогда получается $[2^n\,(R^2+2R)]^{2m}$ последовательностей и не больше этого числа различных пучков.

Лемма 4. *Для любого полюсника π_0 на множестве N вершин связного графа g существует такой пучок П реберников на g, что пучок $(\pi_0) * \Pi$ 0-ровен или 1-ровен на каждой вершине g.*

Доказательство. Пусть g' — какой-нибудь минимальный связный подграф g, содержащий $\pi_0\,(N)$. Очевидно, что g' — дерево. Любому ребру $(a,\ b)$ дерева g' сопоставим следующий реберник $\pi_{(a,\,b)}$ на g: каждый его полюс $\pi_{(a,\,b)}\,(k)$ совпадает с той из вершин a, b, которая окажется в ином связном куске, чем $\pi_0\,(k)$, если выбросить ребро $(a,\ b)$. Тогда пучок, состоящий из реберников $\pi_{(a,\,b)}$, для всех ребер $(a,\ b)$ дерева g', взятых по одному разу, удовлетворяет условиям леммы.

II. Зафиксируем теперь точку $v \in V$ и состояние $x \in X$, такое, что $x_v \neq y_v$. Все построения частей II и III выполняются для выбранных v, x, и далее это не оговаривается.

Пусть точка $a \in V$ такова, что $\varphi_a\,(x_{U(a)}) = x_a \neq y_a$. В этом случае для каждого $k \in N$ выберем точку $\bar{u}_k\,(a) \in U\,(a)$, такую, что $x_{\bar{u}_k(a)} \neq y_{\bar{u}_k(a)}$ и $L_k\,(\bar{u}_k\,(a)) - L_k\,(a) \geqslant r$. Существование таких $\bar{u}_k\,(a)$ гарантируется условием 4 в формулировке теоремы. При этом обозначаем $\bar{U}\,(a) = \{\bar{u}_k\,(a),\ k \in N\}$. Если же $\varphi_a\,(x_{U(a)}) \neq x_a$ или $x_a = y_a$, то полагаем $\bar{U}(a)$ пустым. Для $A \subset V$ обозначим $\bar{U}(A)=\bigcup_{a\in A}\bar{U}(a)$, затем $\bar{U}^{k+1}(A)=\bar{U}(\bar{U}^k(A))$, где $\bar{U}^0(A)=A$, и $\bar{U}^\infty(A)=\bigcup_{k=0}^{\infty}\bar{U}^k(A)$. Обозначим также $\hat{U}=\{a\in\bar{U}^\infty(v):\bar{U}(a)=\varnothing\}$.

Лемма 5. *Все точки* $a\in\hat{U}$ *внутренние, и для всех них* $x_a\neq\varphi_a(x_{U(a)})$.

Доказательство. Легко доказать по индукции, что $x_a\neq y_a$ для всех $a\in\bar{U}^\infty(v)$. В частности, это верно и для всех $a\in\hat{U}$. Отсюда сразу следует утверждение леммы.

Определим ориентированный граф G с множеством вершин $\bar{U}^\infty(v)$ следующим образом. Из вершины a в вершину b графа G направлено ребро, если $a\in\bar{U}(b)$. Ясно, что граф G конечен и не содержит замкнутых ориентированных путей. Поэтому можно определить на его вершинах целочисленную функцию $t:\bar{U}^\infty(v)\to\mathbf{Z}$, такую, что $a\in\bar{U}(b)\Rightarrow t(a)<t(b)$. Зафиксируем такую функцию $t(\cdot)$.

Теперь перестроим G в другой ориентированный граф $\tilde{G}$. Перестройка осуществляется независимо для всех ребер графа G. Выберем в G вершины a, b, такие, что $a\in\bar{U}(b)$. Поместим между ними $t(b)-t(a)-1$ новых вершин $\alpha^k_{a,b}$, $1\leqslant k\leqslant t(b)-t(a)-1$. Эти новые вершины не называем точками, так как они не принадлежат V. Теперь выбросим старое ребро (a, b) и вставим $t(b)-t(a)$ новых ребер, идущих последовательно: из a в $\alpha^1_{a,b}$, из $\alpha^k_{a,b}$ в $\alpha^{k+1}_{a,b}$ для $1\leqslant k\leqslant t(b)-t(a)-2$ и, наконец, из $\alpha^{t(b)-t(a)-1}_{a,b}$ в b. Проделав это со всеми ребрами (a, b) графа G, получим новый граф $\tilde{G}$. Доопределим нашу функцию $t(\cdot)$ для новых вершин по формуле $t(\alpha^k_{a,b})=t(a)+k$. Для любой вершины a графа $\tilde{G}$ обозначим через $\tilde{U}(a)$ множество всех тех вершин $\tilde{G}$, из которых идут ребра прямо в a. Очевидно, $b\in\tilde{U}(a)\Rightarrow t(a)-t(b)=1$. Теперь для любого A обозначим $\tilde{U}(A)=\bigcup_{a\in A}\tilde{U}(a)$, затем $\tilde{U}^{k+1}(A)=\tilde{U}(\tilde{U}^k(A))$, где

$$\tilde{U}^0(A)=A, \text{ и } \tilde{U}^\infty(A)=\bigcup_{k=0}^{\infty}\tilde{U}^k(A).$$

Перестроим $\tilde{G}$ в другой ориентированный граф T (который окажется деревом). Для этого сначала разобьем все вершины $\tilde{G}$ на классы эквивалентности по следующим трем правилам, где $a\sim b$ означает «a эквивалентна b»: 1) если $t(a)=t(b)$ и $\tilde{U}^\infty(a)\cap\tilde{U}^\infty(b)$ непусто, то $a\sim b$; 2) если $a\sim b$ и $b\sim c$, то $a\sim c$; 3) только те пары a, b эквивалентны, для которых это следует из правил 1, 2. Полученные классы эквивалентности будем называть просто классами. Эти классы служат вершинами нового графа T, определяемого следующим образом.

Из класса A в класс B направляется ребро графа T, если существуют такие $a \in A$ и $b \in B$, что $a \in \tilde{U}(b)$. Граф T задан. Естественно определить функцию $t(\cdot)$ на классах так: $t(A) = t(a)$, где $a \in A$. Обозначим через $U_T^1(A)$ множество всех классов, из которых идут ребра графа T в класс A. Для любого множества S классов обозначаем $U_T(S) = \bigcup\limits_{A \in S} U_T(A)$, затем $U_T^{k+1}(S) = U_T(U_T^k(S))$, где

$U_T^0(S) = S$, и $U_T^\infty(S) = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} U_T^k(S)$.

Легко доказать следующие утверждения. Вершина v графа $\tilde{G}$ неэквивалентна никакой другой и образует класс $\{v\}$. Множество тех вершин $a \in \tilde{U}^\infty(v)$, для которых $\tilde{U}(a)$ пусто, совпадает с $\hat{U}$. Каждая точка a, входящая в $\hat{U}$, не эквивалентна никакой другой вершине, и образует класс $\{a\}$. Если $\{A;\ B\} \subset U_T(D)$ и $A \neq B$, то $U_T^\infty(A) \cap U_T^\infty(B)$ пусто. Граф T — дерево, все ребра которого ориентированы по направлению к вершине $\{v\}$.

Теперь для каждого класса A, такого, что $U_T(A)$ непусто, определим (неориентированный) граф $g(A)$ с множеством вершин $U_T(A)$. Классы B, $B' \in U_T(A)$ соединяются ребром графа $g(A)$, если $B \neq B'$ и существуют такие точки b, b', $a \in V$, что $b \in \tilde{U}^\infty(B) \cap \bar{U}(a)$ и $b' \in \tilde{U}^\infty(B') \cap \bar{U}(a)$.

Лемма 6. *Каждый граф $g(A)$ связен.*

Доказательство. Пусть B и B' — различные вершины $g(A)$. По определению $g(A)$ и $U_T(A)$ существуют такие $b \in B$, $b' \in B'$, a, $a' \in A$, что $b \in \tilde{U}(a)$ и $b' \in \tilde{U}(a')$. Допустим сначала, что $a = a'$. Тогда $a \in V$ и существуют $d \in \tilde{U}^\infty(b) \cap \bar{U}(a)$ и $d' \in \tilde{U}^\infty(b') \cap \bar{U}(a)$, откуда B и B' соединены ребром $g(A)$. Пусть $a \neq a'$. Но, поскольку $a \sim a'$, то существует последовательность $a_0 = a$, a_1, $a_2, \ldots, a_{k-1}$, $a_k = a'$ различных элементов A, такая, что пересечение $\tilde{U}^\infty(a_{l-1}) \cap \tilde{U}^\infty(a_l)$ непусто при каждом l от 1 до k. Тогда при каждом l существуют такие $d_{l-1} \in \bar{U}(a_{l-1})$ и $d'_l \in \bar{U}(a_l)$, что $\tilde{U}^\infty(d_{l-1}) \cap \cap \tilde{U}^\infty(d'_l)$ непусто. Кроме того, $t(d_{l-1}) = t(d'_l) = t(A) - 1$. Следовательно, $d_{l-1} \sim d'_l$ и попадают в один класс D_l. Легко доказать, что в последовательности классов B, D_1, $D_2, \ldots, D_k$, B' каждые два соседних либо совпадают, либо соединены ребром $g(A)$, что и требовалось.

III. Теперь q — целый параметр, меняющийся от 0 до Q. Величину Q выберем ниже. Для любого значения q построим два пучка Π_q^1 и Π_q^2 на $\bar{U}^\infty(v)$, множество S_q классов и (неориентированный) граф G_q, определяемый ими следующим образом. Множеством вершин G_q служит $(\Pi_q^1 * \Pi_q^2)(N)$. Две вершины a, b графа G_q соединяются ребром, если $a \neq b$ и выполняется хотя бы одно из следующих двух условий: 1) в пучке $\Pi_q^1 * \Pi_q^2$ есть такой полюсник π, что $\pi(N) = \{a; b\}$; 2) в множестве S_q есть такой класс A, что $\{a; b\} \subset \tilde{U}^\infty(A)$. Будем строить Π_q^1, Π_q^2, S_q (а, тем самым, и G_q) индуктивно при q возрастающем от 0 до Q. Опираясь на способ построения, который опишем ниже, легко доказать по индукции, что Π_q^1, Π_q^2, S_q и G_q при всех q обладают следующими семью свойствами. При этом обозначаем $\Pi_q = \Pi_q^1 * \Pi_q^2 * \Pi^0$, где Π^0 состоит из одного полюсника, все полюса которого совпадают с v.

1. Пучок Π_q^1 состоит только из стрелок, а пучок Π_q^2 — только из вилок.

2. Если классы A, B различны и оба принадлежат S_q, то A не принадлежит $U_T^\infty(B)$.

3. Для любой точки $a \in \Pi_q(N)$ найдется класс $A \in S_q$, такой, что $\tilde{U}^\infty(a) \cap \tilde{U}^\infty(A)$ непусто.

4. Пучок Π_q всюду ровен на множестве $\bar{U}^\infty(v) \setminus \tilde{U}^\infty(\bigcup_{A \in S_q} A)$.

5. Для любого $A \in S_q$ пучок Π_q 1-ровен на $\tilde{U}^\infty(A)$.

6. Число $|S_q|$ элементов S_q равно числу вилок в Π_q^2 плюс единица.

7. Граф G_q связен.

Опишем теперь индукционное построение, разбив его на три пункта.

1. В начальном случае $q = 0$ полагаем пучки Π_0^1 и Π_0^2 пустыми. Множество S_0 состоит из одного класса $\{v\}$. Очевидно, что все семь свойств имеют место в этом случае.

2. Момент окончания индукции. Пусть построили Π_q^1, Π_q^2, S_q. Если $U_T(A)$ пусто для каждого $A \in S_q$, то приравниваем Q к текущему значению q и построение прекращаем.

3. Индукционный шаг. Пусть Π_q^1, Π_q^2, S_q уже построены и обладают названными семью свойствами, причем есть класс $A \in S_q$, такой, что $U_T(A)$ непусто. Зафиксируем класс A и построим Π_{q+1}^1, Π_{q+1}^2, S_{q+1}. Будем строить новые пучки в виде $\Pi_{q+1}^1 = \Pi_q^1 * \Pi^1$ и $\Pi_{q+1}^2 = \Pi_q^2 * \Pi^2$, где остается только определить Π^1 и Π^2.

Если $A \cap \Pi_q(N)$ пусто, то и пучок Π^1 пуст. Пусть теперь $A \cap \Pi_q(N)$ непусто. Из 5-го свойства для Π_q следует, что при любом k не более чем один полюсник в Π_q может иметь k-й полюс в A. Пусть $N' \subset N$ — множество тех значений k, при которых A содержит k-й полюс какого-то π в Π_q. Для каждого $k \in N'$ обозначим этот полюс через α_k и построим стрелку π_k по следующему правилу: ее k-м полюсом служит $\bar{u}_k(\alpha_k)$, а все остальные ее полюса совпадают с α_k. Пучок Π^1 состоит из этих стрелок π_k для всех $k \in N'$, взятых по одному разу. Пучок $\Pi_q * \Pi^1$ всюду ровен на A и 1-ровен на $U_T^\infty(A) \setminus A$. Последнее утверждение позволяет составить полюсник π_0 на $U_T(A)$ по следующему правилу: $\pi_0(k) = B$, где B — тот элемент $U_T(A)$, для которого $\widetilde{U}^\infty(B)$ содержит k-й полюс одного из полюсников в $\Pi_q * \Pi^1$. Далее, пользуясь леммами 4 и 6, выберем пучок $(\pi_1, \ldots, \pi_m)$ реберников на $g(A)$, такой, что пучок $(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_m)$ о-ровен или 1-ровен на каждой вершине $g(A)$. Каждому ребернику π_l, $1 \leqslant l \leqslant m$ на $g(A)$ сопоставим вилку $\bar{\pi}_l$ по следующему правилу. Пусть $\pi_l(N) = \{B, B'\} \subset U_T(A)$. Поскольку B и B' соединены ребром в $g(A)$, то существуют такие точки b, b', $a \in V$, что $b \in \widetilde{U}^\infty(B) \cap \bar{U}(a)$ и $b' \in \widetilde{U}^\infty(B') \cap \bar{U}(a)$. Выберем такие b, b' и определим вилку $\bar{\pi}_l$ так: если $\pi_l(k) = B$, то $\bar{\pi}_l(k) = b$, а если $\pi_l(k) = B'$, то $\bar{\pi}_l(k) = b'$. Полученные m вилок $\bar{\pi}_1, \ldots, \bar{\pi}_m$ и составляют пучок Π^2.

Определим теперь множество S_{q+1}. Оно получается из S_q путем того, что класс A из него исключается, а добавляются те классы $B \in U_T(A)$, для которых $\widetilde{U}^\infty(B) \cap \Pi_{q+1}(N)$ непусто.

Описание индукционного шага построения окончено. Легко доказать, что если Π_q^1, Π_q^2, S_q, G_q обладали указанными семью свойствами, то и Π_{q+1}^1, Π_{q+1}^2, S_{q+1}, G_{q+1} ими обладают.

Поскольку число классов в $U_T^\infty(S_q)$ строго убывает на каждом шаге, то построение непременно закончится. По его окончании получаем пучки Π_Q^1 и Π_Q^2 и множество S_Q. Обозначим $\Pi = \Pi_Q^1 * \Pi_Q^2$. Ясно, что каждый класс, входящий в S_Q, состоит из одной точки. Это позволяет ввести множество $S = \{a : \{a\} \in S_Q\}$. Ясно, что $S \subset \bar{U}$. Применяя доказанные семь свойств к случаю $q = Q$, получаем следующее. Пучок Π состоит из стрелок и вилок, причем число последних равно числу элементов в S минус единица. Он связен и всюду ровен.

IV. Оставим фиксированной только точку v и рассмотрим все $x \in X$, такие, что $x_v \neq y_v$. Для каждого из них построим пучок Π и множество S, которые обозначим через $\Pi(x)$ и $S(x)$.

Лемма 7. *Если* $\Pi(x) = \Pi(x')$, *то и* $S(x) = S(x')$.

Доказательство вытекает из следующего представления множества S, проверяемого непосредственно. Множество S состоит из всех тех точек $a \in \Pi(N)$, для которых не существует стрелки π, входящей в Π, такой, что $\pi(N) = \{a;\ b\}$, где $b \in U(a)$.

Обозначим через M_k количество различных множеств $S(x)$, содержащих $k+1$ точку, и оценим его. Поскольку Π_ϱ^2 для этих x состоит из k вилок, то $\Pi(x)$ по лемме 2 содержит не менее чем k и не более чем $k(1+2nr^{-1})$ полюсников. Отсюда по лемме 3 количество этих $\Pi(x)$, а следовательно, по лемме 7 и число M_k не превышает

$$M_k \leqslant \sum_{m=k}^{[k(1+2nr^{-1})]} [2^n (R^2+2R)]^{2m}.$$

Оценим величину $\mu(x_\mathfrak{v} \neq y_\mathfrak{v})$ для $\mu \in \mathrm{M}_\varepsilon(y_W)$. Каждому x, такому, что $x_\mathfrak{v} \neq y_\mathfrak{v}$, сопоставим цилиндрическое множество $C_x \subset X$:

$$C_x = \{x' : x'_a \neq \varphi_a(x'_{U(a)}) \text{ для всех } a \in S(x)\}.$$

Каждое x входит в свое C_x по лемме 5. Поэтому

$$\{x : x_\mathfrak{v} \neq y_\mathfrak{v}\} \subset \bigcup_{x : x_\mathfrak{v} \neq y_\mathfrak{v}} C_x,$$

где в правой части можно брать только отличные друг от друга множества C_x. С другой стороны, раз $\mu \in \mathrm{M}_\varepsilon(y_W)$, то $\mu(C_x) \leqslant \varepsilon^{|S(x)|}$. Из всего этого следует, что

$$\mu(x_\mathfrak{v} \neq y_\mathfrak{v}) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} M_k \varepsilon^{k+1}.$$

Подставляя сюда оценку M_k, получаем, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} M_k \varepsilon^{k+1}$ сходится при достаточно малых $\varepsilon > 0$, и его сумма стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Отсюда следует утверждение теоремы.

§ 3. Тесселяции с многими устойчивыми траекториями и однородные случайные среды с многими инвариантными мерами

Используя теорему 1, рассмотрим один пример и докажем две теоремы. Но сначала определим в удобных обозначениях тесселяции — тот вид комбайнов, который будем рассматривать. Назовем комбайн тесселяцией, если он строится так, как описано в следующих трех пунктах.

1. Задана $(d+1)$-мерная целочисленная решетка $\mathbf{Z}^{d+1}$, элементы которой обозначаем $v = (s,\ t)$, $s \in \mathbf{Z}^d$, $t \in \mathbf{Z}$. Множество V есть половина этой решетки:

$$V = \mathbf{Z}^d \times \mathbf{Z}_+ = \{(s,\ t) : t \geqslant 0\}.$$

2. Задано конечное множество $U \subset \mathbf{Z}^{d+1} \setminus V$, т. е. $(s, t) \in U \Rightarrow t < 0$. Обозначаем $R = |U|$ и $t_W = \max\limits_{(s, t) \in U} |t|$. Точку $(s, t) \in V$ считаем внутренней, если $t \geqslant t_W$, т. е. $W = \{(s, t) : 0 \leqslant t < t_W\}$. Для любой внутренней точки v полагаем $U(v) = v + U$. Элементы U удобно пронумеровать: $U = \{(u_1, t_1), \ldots, (u_R, t_R)\}$, где $u_1, \ldots, u_R \in Z^d$, $t_1, \ldots, t_R < 0$. Про тесселяцию скажем, что она *без памяти*, если $t_W = 1$, т. е. $t_1 = \ldots = t_R = -1$.

3. Все множества X_v при $v \in V$ и $v \in U$ совпадают с фиксированным конечным множеством X_0. Задано отображение $\varphi : X_0^R \to X_0$, и все отображения $\varphi_v : X_{U(v)} \to X_v$, $v \in V \setminus W$ совпадают с $\varphi(\cdot)$ в следующем смысле:

$$\varphi_v(x_{U(v)}) = \varphi(x_{v+(u_1, t_1)}, \ldots, x_{v+(u_R, t_R)}).$$

Иногда удобнее задавать их с помощью отображения $\varphi_0 : X_U \to X_0$, совпадающего с $\varphi(\cdot)$ в аналогичном смысле:

$$\varphi_0(x_U) = \varphi(x_{(u_1, t_1)}, \ldots, x_{(u_R, t_R)}).$$

Пример 1. Тесселяция без памяти имеет $d = 2$,

$$X_0 = \{0; 1\};\ R = 3;\ U = \{0; 0);\ (0; 1);\ (1; 0)\}.$$

Значением $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ служит то из чисел 0 или 1, которому равно большинство из аргументов x_1, x_2, x_3.

Очевидно, что состояния «все нули» и «все единицы» — траектории, свойства которых аналогичны друг другу из-за симметрии нулей и единиц в этом примере. Поведение этой тесселяции (и некоторых других) при наличии случайного «шума» было впервые изучено в работе [2] моделированием на ЦВМ. Было обнаружено, что эти траектории устойчивы (выражаясь нашим термином). Теперь устойчивость этих траекторий доказана, так как теорема 1 применима к ним обеим при $r = 1$ и $L_1(s, t) = -3s_1 - t$, $L_2(s, t) = -3s_2 - t$, $L_3(s, t) = 3s_1 + 3s_2 + 2t$, где s_1, s_2 — компоненты s.

Теоремы 3, 4 обобщают этот пример. Назовем состояние $y \in X_0^{\mathbf{Z}^{d+1}}$ всей решетки $\mathbf{Z}^{d+1}$ транслятом состояния $x \in X_0^{\mathbf{Z}^{d+1}}$, если существует такое w, что $y_v = x_{v+w}$ при всех $v \in \mathbf{Z}^{d+1}$. Назовем $x \in X_0^{\mathbf{Z}^{d+1}}$ периодическим, если среди всех его транслятов имеется лишь конечное число различных. Назовем $x \in X_0^{\mathbf{Z}^{d+1}}$ стационарным, если $x_{(s,t)}$ не зависит от t.

Теорема 3. *Пусть $y_V^1, \ldots, y_V^n$ суть ограничения на V любых периодических состояний $y^1, \ldots, y^n \in X_0^{\mathbf{Z}^{d+1}}$, где $V = \mathbf{Z}^d \times \mathbf{Z}_+$ и $d \geqslant 2$.*

Тогда существует тесселяция с этими V и X_0, в которой все $y^1_V, \ldots, y^n_V$ устойчивые траектории. Если к тому же все $y^1, \ldots, y^n$ стационарны, то тесселяцию можно выбрать без памяти.

Ограничение $d \geqslant 2$ необходимо при изложенном ниже методе построения. В статье [4] построен одномерный (т. е. с $V = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_+$), но неоднородный комбайн с двумя устойчивыми траекториями.

Доказательство теоремы 3. Пусть $y^1, \ldots, y^N$ — полный список различных транслятов состояний $y^1, \ldots, y^n$. Обозначим

$$C_{\sigma,\tau}(s^0, t^0) = \{(s, t) \in \mathbf{Z}^{d+1} : |s - s^0| \leqslant \sigma, \quad t^0 - \tau \leqslant t < t^0\},$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма, $\sigma > 0$, $\tau > 0$, $s^0 \in \mathbf{Z}^d$, $t \in \mathbf{Z}$ — параметры. Можно выбрать σ, τ настолько большими, что ограничения всех $y^1, \ldots, y^N$ на $C_{\sigma,\tau}(s^0, t^0)$ будут различны при каждых s^0, t^0. В частности, если все $y^1, \ldots, y^n$ стационарны, можно взять $\tau = 1$. Зафиксируем такие σ, τ. Теперь выберем любые три однородные линейные функции $L_1, L_2, L_3 : \mathbf{Z}^d \to \mathbf{R}$, такие, что

$$\forall s \in \mathbf{Z}^d : L_1(s) + L_2(s) + L_3(s) = 0,$$

причем каждые две из функций $L_1(\cdot)$, $L_2(\cdot)$, $L_3(\cdot)$ линейно независимы. Введем три подмножества $\mathbf{Z}^d$:

$$Q_1 = \{s : L_1(s) \geqslant 1, \quad L_2(s) \geqslant 1\},$$
$$Q_2 = \{s : L_2(s) \geqslant 1, \quad L_3(s) \geqslant 1\},$$
$$Q_3 = \{s : L_3(s) \geqslant 1, \quad L_1(s) \geqslant 1\}.$$

Каждое из них содержит сколь угодно большие сферы в $\mathbf{Z}^d$. Пользуясь этим, выберем такие s^1, s^2, $s^3 \in \mathbf{Z}^d$, что $\{s : |s - s^i| \leqslant \sigma\} \subset Q_i$, где $i = 1, 2, 3$. Определим тесселяцию. Положим $U := C_1 \cup C_2 \cup C_3$, где

$$C_i = \{(s, t) \in \mathbf{Z}^{d+1} : |s - s^i| \leqslant \sigma; \quad -\tau \leqslant t < 0\}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Определим отображение $\varphi_0 : X_U \to X_0$ следующим образом:

$$\varphi_0(x_U) = \begin{cases} y^k(0, 0), \text{ если выполняются хотя бы два из следующих трех условий: 1) } x_{C_1} = y^k_{C_1}, \text{ 2) } x_{C_2} = y^k_{C_2}, \text{ 3) } x_{C_3} = y^k_{C_3}, \text{ где } k \in \{1, \ldots, N\}; \\ \text{доопределяется произвольно, если предыдущее условие не выполняется ни для одного } k \in \{1, \ldots, N\}. \end{cases}$$

Легко убедиться, что это определение непротиворечиво. Итак, тесселяция задана. Ясно, что все условия теоремы 1 выполняются для каждого $y^1_V, \ldots, y^N_V$ при функциях $L_1(\cdot)$, $L_2(\cdot)$, $L_3(\cdot)$, совпадающих с введенными выше и при $r = 1$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4, по существу, повторяет теорему 3, но сформулирована для более известного понятия однородной случайной среды, (для краткости будем называть здесь ее оператором), изучавшегося в ряде статей (см., например, [1—3]). Пусть выбран конечный список векторов $u_1, \ldots, u_R \in \mathbf{Z}^d$, конечное множество X_0 и $|X_0|^{R+1}$ неотрицательных чисел — вероятностей $\theta(b \mid a_1, \ldots, a_R)$, где $b, a_1, \ldots$ $\ldots, a_R \in X_0$, причем $\forall a_1, \ldots, a_R : \sum_{b \in X_0} \theta(b \mid a_1, \ldots, a_R) = 1$.

Пусть M — совокупность нормированных мер на σ-алгебре, порожденной всеми цилиндрическими подмножествами $X = X_0^{\mathbf{Z}^d}$. Назовем оператором всякое линейное, непрерывное в топологии произведения отображение $P : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$, применение которого к любой мере δ_y, сконцентрированной в состоянии $y \in X$ дает бернуллиевскую меру $P\delta_y$, такую, что

$$(P\delta_y)(x_s = b) = \theta\left(b \mid y_{s+u_1}, \ldots, y_{s+u_R}\right).$$

Мера μ называется инвариантной для P, если $\mu = P\mu$. Если два оператора P и P^0 имеют одни и те же $d, u_1, \ldots, u_R, X_0$, и только вероятности $\theta(b \mid a_1, \ldots, a_R)$, $\theta^0(b \mid a_1, \ldots, a_R)$ у них могут быть различны, то обозначим

$$|P, P^0| = \max_{b, a_1, \ldots, a_R} |\theta(b \mid a_1, \ldots, a_R) - \theta^0(b \mid a_1, \ldots, a_R)|.$$

Назовем оператор P детерминированным, если все его $\theta(b \mid a_1, \ldots$ $\ldots, a_R)$ равны нулю или единице.

Теорема 4. *Пусть $y^1, \ldots, y^n$ — любые периодические состояния в $X = X_0^{\mathbf{Z}^d}$. Тогда существует такой детерминированный оператор P^0, действующий на совокупности M мер на X, для которого меры $\delta_{y^1}, \ldots, \delta_{y^n}$ инвариантны, что всякий оператор P имеет для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ инвариантную меру, стремящуюся к δ_{y^k} при $|p, p^0| \to 0$.* Следовательно, существует такое $\varepsilon > 0$, что всякий P, для которого $|P, P^0| < \varepsilon$, имеет не менее чем n различных инвариантных мер.

Доказательство. Обозначим через z^k, $1 \leqslant k \leqslant n$, элемент $X_0^{\mathbf{Z}^d \cdot \mathbf{Z}_+}$, определяемый следующим образом: $z^k(s, t) = y^k(s)$ при всех $s \in \mathbf{Z}^d$, $t \in \mathbf{Z}_+$. Пользуясь теоремой 3, построим тесселяцию без памяти, для которой все z^k устойчивые траектории. Эту тесселяцию (как и любую тесселяцию без памяти) можно рассматривать как временну́ю развертку детерминированного оператора P^0 с теми же, что у нее, d, $u, \ldots, u_R$ и

$$\theta(y \mid x_1, \ldots, x_R) = \begin{cases} 1, & \text{если } y = \varphi(x_1, \ldots, x_R), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Этот оператор P^0 и является искомым. Действительно, из устойчивости z^k легко вывести, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\substack{s,\, t \\ |P,\, P^0| \leqslant \varepsilon}} (P^t \delta_{y^k})(x_s \neq y_s^k) = 0.$$

Применяя принцип неподвижной точки, подобно тому как это сделано в работе [3], легко доказать теорему 4.

§ 4. Монотонные бинарные тесселяции

Здесь рассматриваются лишь такие тесселяции (см. § 3), у которых $X_0 = \{0;\ 1\}$ и функция $\varphi(\cdot)$ монотонна, т. е.

$$(\forall v \in U : x_v \leqslant x'_v) \Rightarrow \varphi(x_U) \leqslant \varphi(x'_U).$$

Тогда без ограничения общности можно считать, что $\varphi(0, 0, \ldots$ $\ldots, 0) = 0$ и $\varphi(1, 1, \ldots, 1) = 1$, так как в противном случае $\varphi(x_U) = \mathrm{const}$, что тривиально. Налагая эти ограничения, получаем класс монотонных бинарных тесселяций (МБТ). Очевидно, состояние «все нули» в каждой МБТ есть траектория. Выясним, когда она притягивающая и устойчивая. Условия, при которых траектория «все нули» — притягивающая, были найдены в работе [5] для МБТ без памяти и в работе [6] для одномерных монотонных тесселяций с памятью и с $X_0 = \{0;\ 1;\ \ldots;\ n\}$.

Теорема 5. *Во всякой МБТ траектория* «все нули» *устойчива, если и только если она притягивающая.*

Сначала выясним, когда траектория «все нули» притягивающая. Назовем множество $A \subset U$ *нулевым*, если условие $\forall v \in A : x_v = 0$ гарантирует, что $\varphi(x_U) = 0$. Назовем нулевое множество *минимальным*, если оно не содержит никакого другого нулевого множества. Далее $z_1, \ldots, z_Q$ означает полный список минимальных нулевых множеств. Погрузим теперь нашу решетку $\mathbf{Z}^{d+1}$ в действительное пространство $\mathbf{R}^{d+1}$ с теми же осями координат. Тем самым всякое множество в $\mathbf{Z}^{d+1}$ становится множеством в $\mathbf{R}^{d+1}$. Обозначаем через $\mathrm{conv}(A)$ выпуклую оболочку всякого $A \subset \mathbf{R}^{d+1}$.

Теорема 6. *Траектория* «все нули» *притягивающая, если и только если не существует луча, выходящего из начала координат* 0 *в* $\mathbf{R}^{d+1}$, *пересекающего каждое* $\mathrm{conv}(z_q)$, $1 \leqslant q \leqslant Q$.

Примем следующие обозначения, где $c\in\mathbf{R}^{d+1}$, $A,\ B\subset\mathbf{R}^{d+1}$, $k\in\mathbf{R}$: $kA=\{ka,\ a\in A\}$, $-A=(-1)A$, $A+c=\{a+c,\ a\in A\}$, $A+B=\{a+b,\ a\in A,\ b\in B\}$, $A-B=A+(-B)$. Обозначаем также $\operatorname{ray}(A)=\bigcup_{k\geqslant 0}kA$ и вводим следующее важное множество:

$$\sigma=\sigma(\text{МБТ})=-\bigcap_{q=1}^{Q}\operatorname{ray}(\operatorname{conv}(z_q)).$$

Теорема 6' (эквивалентная теореме 6). *Траектория «все нули» притягивающая, если и только если $\sigma=\{O\}$, т. е. σ состоит лишь из начала координат O.*

Будем доказывать эту теорему по частям, приводя попутно другие теоремы, описывающие свойства траекторий, порождаемых конечными возмущениями базы «все нули». Для любой базы x_W и любого состояния x обозначим

$$I(x_W)=\{a\in W: x_a=1\},\quad I(x)=\{a\in V: x_a=1\}.$$

Лемма 8. *Для любой базы x_W:*

$$I(\operatorname{tr}(x_W))\subset\bigcap_{q=1}^{Q}(I(x_W)-\operatorname{ray}(\operatorname{conv}(z_q))).$$

Доказательство. Сначала докажем, что

$$I(\operatorname{tr}(x_W))\subset I(x_W)\cup(I(x_W)-z_q)\cup(I(x_W)-z_q-z_q)\cup\ldots=$$
$$=I(x_W)\cup\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(I(x_W)-\sum_{j=1}^{i}z_q\right)=\Sigma_q,$$

где q любое от 1 до Q. Здесь Σ_q определяется последним равенством. Ясно, что если $v\notin\Sigma_q$, то $(v+z_q)\cap\Sigma_q$ пусто. С другой стороны, если точка v внутренняя и $v\in I(\operatorname{tr}(x_W))$, то $(v+z_q)\cap I(\operatorname{tr}(x_W))$ непусто. Поэтому, если множество $I(\operatorname{tr}(x_W))\setminus\Sigma_q$ содержит внутреннюю точку v, то оно содержит какую-то точку в $U(v)$. Отсюда, рассуждая по индукции, получаем, что если $I(\operatorname{tr}(x_W))\setminus\Sigma_q$ непусто, то оно содержит граничную точку, что, очевидно, невозможно. Итак, $I(\operatorname{tr}(x_W))\setminus\Sigma_q$ пусто, т. е. формула верна. Она останется верной, если заменить в ней z_q на $\operatorname{conv}(z_q)$. Но $\sum_{j=1}^{i}A=iA$ для любого выпуклого A. Используя это, получаем

$$I(\operatorname{tr}(x_W))\subset I(x_W)-\bigcup_{i=0}^{\infty}i\operatorname{conv}(z_q)\subset I(x_W)-\operatorname{ray}(\operatorname{conv}(z_q)).$$

Отсюда, взяв пересечение по всем q от 1 до Q, получаем требуемое.

Обозначим через $\mathrm{Sp}(\rho)$ шар в $\mathbf{R}^{d+1}$ с центром O и радиусом ρ. Ясно, что $A+\mathrm{Sp}(\rho)$ — это то, что обычно называется ρ-окрестностью A. Назовем полупространством всякое множество вида $\{v \in \mathbf{R}^{d+1} : L(v) \leqslant 0\}$, где функция $L : \mathbf{R}^{d+1} \to \mathbf{R}$ линейна, однородна и непостоянна. Иными словами, полупространство — это замкнутое множество в $\mathbf{R}^{d+1}$, ограниченное гиперплоскостью, проходящей через начало координат.

Лемма 9. *Для любого конечного набора $P_1, \ldots, P_M$ множеств, являющихся пересечениями конечного числа полупространств, есть такое число $\lambda \geqslant 1$, что*

$$\forall \rho > 0 : \bigcap_{m=1}^{M} (P_m + \mathrm{Sp}(\rho)) \subset \bigcap_{m=1}^{M} P_m + \mathrm{Sp}(\lambda\rho).$$

Доказательство предоставляем читателю.

Теорема 7. *Для любой* МБТ *есть такое число* $\lambda \geqslant 1$, *что*

$$\forall \rho > 0 : I(x_W) \subset \mathrm{Sp}(\rho) \Rightarrow I(\mathrm{tr}(x_W)) \subset \sigma + \mathrm{Sp}(\lambda\rho).$$

Доказательство сразу следует из лемм 8 и 9 и того факта, что каждое $\mathrm{ray}(\mathrm{conv}(z_q))$ есть пересечение конечного числа полупространств.

Из теоремы 7 следует теорема 6 в одну сторону. Действительно, в случае $\sigma = \{O\}$, как доказано, если $I(x_W)$ конечно, то и $I(\mathrm{tr}(x_W))$ конечно. Теперь перейдем к случаю, когда $\sigma \neq \{O\}$. Назовем множество $A \subset \mathbf{R}^{d+1}$ *тупым* для $B \subset \mathbf{R}^{d+1}$, если

$$\forall c \in \mathbf{R}^{d+1} ((A+c) \cap B = \varnothing \Rightarrow (A+c) \cap \mathrm{conv}(B) = \varnothing).$$

Лемма 10. *Если A тупое для B, то и любое $A+A'$ тупое для B.*

Доказательство очевидно.

Теорема 8. *Пусть множество A тупое для каждого $z_1, \ldots, z_Q$ и $(s, t) \in A \Rightarrow t < 0$. Тогда множество $P = (A+\sigma) \cap V$ обладает следующим свойством:*

$$(P \cap W) \subset I(x_W) \Rightarrow P \subset I(\mathrm{tr}(x_W)).$$

Доказательство. Допустим, что множество $P \setminus I(\mathrm{tr}(x_W))$ непусто. Выберем в нем точку v. Если v граничная, то, значит, $(P \cap W) \setminus I(x_W)$ непусто, что и требовалось. Пусть теперь v внутренняя. Поскольку $v \in A+\sigma$, то v представляется как $a+(s, t)$, где $a \in A$, $(s, t) \in \sigma$, $t \geqslant t_W$. Тогда $(s, t)+\mathrm{conv}(z_q)$ при каждом q пересекает σ, и, следовательно, $v+\mathrm{conv}(z_q)$ пересекает $A+\sigma$.

Поскольку $A+\sigma$ тупое для $v+z_q$, то $v+z_q$ пересекает $A+\sigma$. Итак, $v+z_q$ пересекает P при каждом q от 1 до Q. С другой стороны, раз $v \in$ или $\notin I(\mathrm{tr}(x_W))$, то существует такое q, при котором $v+z_q$ не пересекает $I(\mathrm{tr}(x_W))$. Итак, если множество $P \setminus I(\mathrm{tr}(x_W))$ содержит внутреннюю точку v, то оно пересекается с $U(v)$, откуда, рассуждая по индукции, оно содержит граничную точку, что и требовалось доказать.

Лемма 11. *Для любого $B \subset \mathbf{R}^{d+1}$ множество $-(d+1)\,\mathrm{conv}(B)$ тупое для B.*

Доказательство. Опираясь на случай, когда B — множество вершин симплекса, докажем лемму (его доказательство не приводится). Пусть некоторое $A = c-(d+1)\,\mathrm{conv}(B)$ пересекает $\mathrm{conv}(B)$. Существует такая гомотетия $H: \mathbf{R}^{d+1} \to \mathbf{R}^{d+1}$ с центром h и коэффициентом $-(d+1)$, что $H(\mathrm{conv}(B)) = A$. Поскольку A пересекает $\mathrm{conv}(B)$, то $h \in \mathrm{conv}(B)$. По теореме Каратеодори h принадлежит некоторому симплексу S с вершинами в B. Поскольку S пересекает $H(S)$, то и какая-то вершина S принадлежит $H(S)$, так как $H(S)$ тупое для S. Отсюда B пересекается с A, что и требовалось доказать.

Из теоремы 8 и лемм 10 и 11 следует оставшаяся часть теоремы 6. Действительно, пусть $\sigma \neq \{0\}$. Тогда определим A:

$$A = -(d+1)\sum_{q=1}^{Q} \mathrm{conv}(z_q) + C + e.$$

Здесь C — единичный куб в $\mathbf{R}^{d+1}$. Он добавлен, чтобы $A+\sigma$ содержало точки $(s, t) \in V$ при всех $t \in \mathbf{Z}_+$. Вектор $e \in \mathbf{R}^{d+1}$ добавлен такой, чтобы было $(s, t) \in A \Rightarrow t \leqslant 0$. Из лемм 10 и 11 следует, что это A тупое для всех $z_1, \ldots, z_Q$. Определим базу x_W по формуле: $I(x_W) = (A+\sigma) \cap W$. Тогда из теоремы 8 следует, что $\forall t \in \mathbf{Z}_+$ $\exists s \in \mathbf{Z}^d$: $(\mathrm{tr}(x_W))_{(s,t)} = 1$, т. е. траектория «все нули» не притягивающая. Итак, теорема 6 доказана полностью. Чтобы доказать теорему 5, понадобится еще одна лемма.

Лемма 12. $\sigma(\text{МБТ}) = \{O\}$, *если и только если существуют такие однородные линейные функции $L_1, \ldots, L_n: \mathbf{R}^{d+1} \to \mathbf{R}$, где $n \leqslant d+2$, и такое $r > 0$, что $\forall v: \sum_{k=1}^{n} L_k(v) = 0$ и каждое множество $\{v \in U: L_k(v) \geqslant r\}$ нулевое, $1 \leqslant k \leqslant n$.*

Доказательство. Пусть такие $L_1(\cdot), \ldots, L_n(\cdot)$ и $r > 0$ существуют, тем не менее σ содержит точку $a \neq O$. Тогда найдется

k, при котором $L_k(a) \leqslant 0$ и $\forall m \geqslant 0 : L_k(ma) \leqslant 0$, откуда $\forall q \in \{1, \ldots, Q\}\ \exists b \in z_q : L_k(b) \leqslant 0$. Но поскольку множество $\{v \in U : L_k(v) \geqslant r\}$ нулевое, то существует такое q, что $b \in z_q \Rightarrow L_k(b) \geqslant r$. Полученное противоречие доказывает лемму в одну сторону.

Предположим теперь, что $\sigma = \{O\}$ и построим $L_1(\cdot), \ldots, L_n(\cdot)$, $r > 0$, удовлетворяющие названным условиям. Представим каждое $\operatorname{ray}(\operatorname{conv}(z_q))$ как пересечение конечного числа полупространств. Пусть $H_1, \ldots, H_M$ объединенный список всех этих полупространств. Для каждого m от 1 до M обозначим через $f_m : \mathbf{R}^{d+1} \to \mathbf{R}$ такую линейную функцию, что $H_m = \{v \in \mathbf{R}^{d+1} : f_m(v) \leqslant 0\}$.

Известно, что не существует $a \neq 0$ такого, что $\forall m \in \{1, \ldots, M\} : f_m(a) \leqslant 0$. Это позволяет применить к набору функций $f_1(\ ), \ldots, f_M(\cdot)$ и множеству $C = \{(s, t) \in \mathbf{R}^{d+1} : t \leqslant -1\}$ теорему 21.3 в работе [7] (вариант теоремы Хелли). Получаем, что среди наших функций есть $n \leqslant d+2$ таких $f'_1(\cdot), \ldots, f'_n(\cdot)$ и есть такие положительные $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ε, что $\forall v \in C : \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f'_k(v) \geqslant \varepsilon$. Отсюда следует, что $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f'_k(v) = -\delta t$, где $\delta > 0$. Функции $L_k = -(\lambda_k f'_k + \delta t n^{-1})$, $1 \leqslant k \leqslant n$ и число $r = \delta n^{-1}$ годятся в качестве искомых. То, что $\forall v : \sum_{k=1}^{n} L_k(v) = 0$, очевидно. Далее каждое множество $\{v \in U : f'_k(v) \leqslant 0\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ нулевое, так как содержит некоторое z_q. Но если $v \in U$ и $f'_k(v) \leqslant 0$, то $L_k(v) \geqslant \delta n^{-1}$. Лемма 12 доказана.

Доказательство теоремы 5. Сначала предположим, что траектория «все нули» притягивающая. Тогда можно применить к ней теорему 1 с теми $L_1(\cdot), \ldots, L_n(\cdot)$ и $r > 0$, которые находятся по лемме 12, и тогда можно доказать теорему 5 в одну сторону.

Предположим, что траектория «все нули» не притягивающая и докажем, что она неустойчива (это похоже на предложение 1 в работе [8]). Введем вспомогательное пространство $\Omega = \{0; 1\}^{V \setminus W}$. Элементы Ω имеют вид $\omega = (\omega_v)$, где $\omega_v \in \{0; 1\}$, $v \in V \setminus W$. Зададим отображение $F : \Omega \to X$ по формуле

$$x_a = \begin{cases} 0, & \text{если } a \in W, \\ \max\{\varphi_a(x_{U(a)}), \omega_a\}, & \text{если } a \in V \setminus W. \end{cases}$$

Через μ_ε обозначим бернуллиевскую меру на Ω, определяемую условием:

$\mu_\varepsilon(\omega_a=1$ при всех $a\in A)=\varepsilon^{|A|}$ для каждого конечного $A\subset V\setminus W$. Через μ_ε обозначаем также меру на X, индуцированную мерой μ_ε на Ω при отображении F. Очевидно, что $\mu_\varepsilon\in M_\varepsilon(0)$, где 0 обозначает базу «все нули». Траектория «все нули» может быть устойчивой только, если $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0\ v\in V}\mu_\varepsilon(x_v=1)=0$. Напротив, докажем, что $\lim\limits_{t\to\infty}\mu_\varepsilon(x_{(s,t)}=1)=1$ при любом $\varepsilon>0$. Выберем базу x_W такую, что $I(x_W)$ конечно, но $\forall t\exists s:(\mathrm{tr}(x_W))_{(s,t)}=1$. Зафиксируем и обозначим s_t какие-то из значений s, соответствующих в этой формуле t, т. е. пусть $\forall t:(\mathrm{tr}(x_W))_{(s_t,t)}=1$. Тогда, если $\omega_v=1$ при всех $v\in(s^0,t^0)+I(x_W)$, то $\forall t\geqslant 0:(F(\omega))_{(s^0+s_t,\,t^0+t)}=1$. Таким образом, условие $(F(\omega))_{(s,t)}=1$ заведомо будет выполнено, если найдется такое $\tau\in\{0;\ \ldots;\ t-t_W\}$, что $\omega_v=1$ для всех $v\in I(x_W)+(s-s_\tau,\ t-\tau)$. Ограничимся лишь значениями τ, кратными t_W:

$$\tau\in\{0;\ t_W;\ 2t_W,\ldots,[tt_W^{-1}-1]\,t_W\},$$

где $t_W=\max\limits_{(s,t)\in W}t+1$. Для этих значений τ события «$\omega_v=1$ для всех $v\in I(x_W)+(s-s_\tau,\ t-\tau)$» независимы друг от друга. Вероятность каждого из этих событий равна $\varepsilon^{|I(x_W)|}$, поэтому вероятность того, что хоть одно из них имеет место, равна

$$1-\left(1-\varepsilon^{|I(x_W)|}\right)^{[tt_W^{-1}-1]}$$

и стремится к 1 при $t\to\infty$. Тем более $\lim\limits_{t\to\infty}\mu_\varepsilon(x_{(s,t)}=1)=1$, что и требовалось.

§ 5. Два контрпримера

Выходя за рамки класса МБТ, приходится сталкиваться с простыми примерами, когда утверждение теоремы 5 о том, что траектория «все нули» устойчива тогда, когда она притягивающая, становится неверным. Приведем два комбайна, в которых траектория «все нули» притягивающая, но неустойчивая. Относящиеся к ним доказательства опубликованы в работе [8].

Пример 2. Тесселяция без памяти, в которой $d=1$, $X_0=\{0;\ 1;\ 2\}$, $R=3$, $u_1=-1$, $u_2=0$, $u_3=1$:

$$\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3)=\begin{cases}0, & \text{если } x_1=0,\ x_2=x_3=1;\\ 1, & \text{если } x_1=x_2=2,\ x_3=1;\\ 2, & \text{если } x_1+x_2=x_3=2;\\ \text{ближайшее целое число к } \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3) & \\ \text{в остальных случаях.} & \end{cases}$$

Легко проверить, что «все нули» — притягивающая траектория. Ее неустойчивость вытекает из следующего. Введем пространство Ω и меру μ_ε на нем так же, как в доказательстве теоремы 5. Определим $F:\Omega\to X$ по формуле

$$x_v=\begin{cases}0, & \text{если } v\in W,\\ \min\{2,\ \varphi_v(x_{U(v)})+\omega_v\}, & \text{если } v\in V\setminus W.\end{cases}$$

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty}\mu_\varepsilon(x_{(s,t)}=2)=1$ при всяком $\varepsilon>0$.

Пример 3. Комбайн, в котором $V=\{-1;1\}\cdot\mathbf{Z}\cdot\mathbf{Z}_+$. Элементы V обозначаем $v=(r,s,t)$, где $r=\{-1;1\}$, $s\in\mathbf{Z}$, $t\in\{0;1;2;\ldots\}$. Точка (r,s,t) внутренняя, если $t\geqslant1$; в этом случае

$$\varphi_{(r,s,t)}\left(x_{U(r,s,t)}\right)=\min\left\{x_{(r,s-r,t-1)},\ \max\left\{x_{(r,s,t-1)},\ x_{(-r,s,t-1)}\right\}\right\},$$

и множество $U(r,s,t)$ состоит из трех точек, служащих индексами в правой части. Комбайн задан. Легко проверить, что «все нули» — притягивающая траектория. Чтобы доказать ее неустойчивость, достаточно ввести пространство Ω, меру μ_ε и отображение $F:\Omega\to X$ так же, как в доказательстве теоремы 5. Тогда $\lim\limits_{t\to\infty}\mu_\varepsilon(x_{(r,s,t)}=1)=1$ при всяком $\varepsilon>0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тоом А. Л.* Неэргодичные многомерные системы автоматов. — «Проблемы передачи информации», 1974, **10**, вып. 3, с. 70—79.
2. *Васильев Н. Б., Петровская М. Б., Пятецкий-Шапиро И. И.* Моделирование голосования со случайной ошибкой. — «Автоматика и телемеханика», 1969, **10**, с. 103—107.
3. *Васерштейн Л. Н.* Марковские процессы на счетном произведении пространств, описывающие большие системы автоматов. — «Проблемы передачи информации», 1969, **5**, вып. 3, с. 64—71.
4. *Цирельсон Б. С.* Неоднородное локальное взаимодействие может создать «дальний порядок» в одномерной системе. — «Теория вероятностей и ее применения», 1976, **21**, № 3, с. 681—683.
5. *Тоом А. Л.* Монотонные бинарные мозаичные автоматы. — «Проблемы передачи информации», 1976, **12**, вып. 1, с. 48—54.
6. *Гальперин Г. А.* Одномерные локальные монотонные операторы с памятью. — «Докл. АН СССР», 1976, **228**, № 2, с. 277—280.
7. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973.
8. *Тоом А. Л.* Неустойчивые многокомпонентные системы. — «Проблемы передачи информации», 1976, **12**, вып. 3, с. 78—84.