АКАДЕМИЯ НАУК СССР
НАУЧНЫЙ ЦЕНТР БИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ В БИОЛОГИИ

Под редакцией д-ра физ.-мат. наук
профессора В. И. Добрушина
канд. физ.-мат. наук В. И. Крюкова
канд. физ.-мат. наук А. Л. Тоома

ПУЩИНО
1977

ЧАСТЬ I

МОНОТОННЫЕ ЭВОЛЮЦИИ В ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.Л.Тоом

Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова

§1. Введение

Эта статья продолжает работы /1-3/ в изучении однородных многокомпонентных систем с локальным взаимодействием во времени. Однако в этой статье "компоненты" расположены не в точках целочисленной решетки, как в указанных работах, а в точках действительного пространства R^{d+1}, поэтому их неудобно называть автоматами. С другой стороны, каждая компонента у нас имеет только два состояния, и состояние всей системы полностью задается подмножеством ее компонент. Поэтому мы не будем больше говорить о состояниях компонент, а только о подмножествах R^{d+1}. Дадим теперь основные определения.

Во всей этой статье V обозначает половину $(d+1)$-мерного действительного пространства: $V = R^d \cdot R_+$. Элементы R^{d+1} будем называть точками и обозначать (s,t), $s \in R^d$, $t \in R$. Таким образом, $V = \{(s,t) : t \geqslant 0\}$. Подмножества V (возможно, несобственные) будем называть <u>состояниями</u>. Заданы число $\tau \geqslant 1$ и множества

$$u = \{(s,t) : |s| \leqslant \tau, \quad -\tau \leqslant t \leqslant -1\}$$
$$I = \{(s,t) : \quad 0 \leqslant t < \tau\}.$$

Подмножества I будем называть базами. Знаки $+$, $-$ в применении к точкам и множествам точек обозначают векторное сложение и вычитание. Для любых

$$A\subset R^{d+1},\quad B\subset R^{d+1},\quad c\in R^{d+1},\quad k\in R:$$

$$A+c=\{a+c,\ a\in A\},\quad A+B=\{a+b,\ a\in A,\ b\in B\},$$

$$kA=\{ka,\ a\in A\},\quad -A=(-1)\cdot A,\quad A-B=A+(-B).$$

Задан ансамбль E, элементами которого служат некоторые подмножества u. Состояние $X\subset V$ называется траекторией, если

$$\forall v\in V\setminus I:\ v\in X\Longleftrightarrow(u\cap(X-v))\in E. \qquad (1)$$

Лемма 1. Для любой базы $B\subset I$ есть ровно одна траектория X такая, что $B=I\cap X$.

Доказательство. Разрежем множество $V\setminus I$ на слои толщины 1:

$$V_k=\{(s,t):\ r+k-1\leqslant t<r+k\},\quad k=1,2,3,\ldots$$

Конечно, всякое состояние X определяется набором его пересечений $X\cap I$, $X\cap V_1$, $X\cap V_2,\ldots$ С другой стороны

$$v\in V_k\Longrightarrow(v+u)\subset(I\cup V_1\cup\ldots\cup V_{k-1}). \qquad (2)$$

Докажем сначала существование траектории. Положим $X\cap I=$ $=B$ и определим $X\cap V_k$ индуктивно. Скажем, что точка $v\in V_k$ входит в $X\cap V_k$, если

$$((X\cap(I\cup V_1\cup\ldots\cup V_{k-1}))-v)\cap u\in E.$$

Очевидно, что это определение непротиворечиво, и X так определенное есть траектория.

Допустим теперь, что X и Y – две различные траектории и $X\cap I=Y\cap I$. Выберем наименьшее k, при котором $X\cap V_k\neq Y\cap V_k$. Можно считать, что $v\in X\cap V_k$, но $v\notin Y\cap V_k$. Из этого следует, что $(u\cap(X-v))\in E$, но $(u\cap(Y-v))\in E$, что противоречит (2).

Всю описанную конструкцию назовем эволюцией. Итак, эволюция $\mathcal{E}$ задается размерностью d, радиусом r и ансамблем E. На основании леммы 1, обозначим через $T_B(\mathcal{E})$ ту траекторию, для которой $T_B(\mathcal{E})\cap I=B$. Назовем эволюцию монотонной, если

$$A\in E,\ A\subset\mathcal{D}\subset u\Longrightarrow\mathcal{D}\in E. \qquad (3)$$

Естественным образом вводится отношение двойственности между эволюциями с фиксированными d и r. Если дана эволюция $\mathcal{E}$, то двойственная к ней эволюция $\bar{\mathcal{E}}$ определяется формулой

$$\forall A \subset \mathcal{U} : (A \in \bar{E} \Longleftrightarrow (\mathcal{U} \setminus A) \notin E). \qquad (4)$$

Конечно, $\bar{\mathcal{E}}$ и $\mathcal{E}$ монотонны одновременно. Траекториями для $\bar{\mathcal{E}}$ служат дополнения к траекториям для $\mathcal{E}$ в множестве V.

В этой статье рассматриваются только монотонные эволюции, и слово "эволюция" во всем дальнейшем тексте означает "монотонная эволюция". Фактически мы предполагаем также, что

$$\emptyset \notin E, \quad \mathcal{U} \in E. \qquad (5)$$

Это не уменьшает общности, потому что в противном случае ансамбль E либо был бы пуст, либо содержал бы все подмножества $\mathcal{U}$, что тривиально. Благодаря условию (5) как пустое подмножество V, так и само V являются траекториями. Благодаря двойственности они аналогичны, и мы ограничимся изучением пустой траектории и ее возмущений.

Будем писать $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$, если эволюции $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ имеют равные α и τ, причем $E_1 \subset E_2$.

Лемма 2. Если $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$, то $T_B(\mathcal{E}_1) \subset T_B(\mathcal{E}_2)$ для любой базы B.

Это легко доказать по индукции, аналогично лемме 1.

§ 2. Разрушающие эволюции

Определение 1. Назовем супремум (возможно, бесконечный) величины t по всем $(s,t) \in T_B$ временем жизни базы B. Назовем эволюцию разрушающей, если всякая ограниченная база имеет в ней конечное время жизни. Назовем эволюцию линейно разрушающей, если существует такое λ, что всякая база, помещающаяся в шар радиуса ρ, имеет в ней время жизни, не превышающее $\lambda\rho$.

В этом параграфе мы исследуем (не полностью), какие эволюции разрушающие и какие среди них линейно разрушающие. Для этого удобно задавать эволюции не с помощью ансамбля E, а с помощью некоторых других ансамблей; сейчас мы их введем.

Определение 2. Назовем множество $C \subset \mathcal{U}$ препятствием, если $c \cap A = \emptyset \Rightarrow A \notin E$. Ансамбль H, элементами которого служат некоторые препятствия, назовем гандикапом, если всякое препятствие содержит какой-нибудь элемент H в качестве подмножества.

Лемма 3. Пусть дан гандикап H эволюции $\mathcal{E}$. Подмножество $\mathcal{U}$ входит в ансамбль E, если и только если оно пересекает все элементы H.

Доказательство. Пусть $A \in E$. Тогда (прямо по определению 2), A пересекает все препятствия, в том числе и все элементы H. Пусть теперь $A \subset \mathcal{U}$ и $A \notin E$. Допустим, что A пересекает все элементы H. Тогда A пересекает все препятствия. Следовательно, $\mathcal{U} \setminus A$ не есть препятствие; то есть имеется $c \in E$ такое, что $c \cap (\mathcal{U} \setminus A) = \emptyset$. Значит, $c \subset A$. Но в сочетании с тем, что $c \in E$ и $A \notin E$, это противоречит монотонности $\mathcal{E}$.

Эта лемма показывает, что хотя эволюция может иметь много гандикапов, каждый гандикап определяет эволюцию однозначно. Пользуясь этим, мы будем в дальнейшем задавать эволюцию с помощью ее гандикапа H, не упоминая при этом число r. Вместо условия (1), определяющего траекторию, мы будем использовать его эквивалент:

$$v \in X \Leftrightarrow (\forall A \in H : (X - v) \cap A \neq \emptyset). \tag{6}$$

Кроме того, мы можем сказать теперь, что $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$, если они имеют равное d, и всякое препятствие $\mathcal{E}_2$ служит препятствием также и для $\mathcal{E}_1$. Лемма 2 при этом остается верной.

Будем использовать следующие обозначения: $ray(A) = \bigcup_{k \geq 0} kA$; $clos(A)$ означает замыкание A; $conv(A)$ означает выпуклую оболочку любого множества A в R^{d+1}. Для нас важно следующее множество:

$$\sigma = \bigcap_{A \in H} ray(clos(conv(A))).$$

Ясно, что σ одно и то же для всех гандикапов данной эволюции $\mathcal{E}$. Поэтому можно писать $\sigma = \sigma(\mathcal{E})$.

Теорема 1. Эволюция $\mathcal{E}$ является линейно разрушающей, если и только если $\sigma(\mathcal{E}) = \{O\}$, то есть $\sigma(\mathcal{E})$ состоит лишь из начала координат O.

Следующая лемма используется не только для доказательства этой теоремы.

Лемма 4. Условие $\sigma(\mathcal{E})=\{0\}$ эквивалентно следующему. Существуют такие n однородных линейных функций $L_1,\ldots,$ $L_n: R^{d+1}\to R$, где $n\leqslant d+2$, и такое число $\kappa>0$, что: (1) $\sum\limits_{\nu=1}^{n} L_\nu(s,t)=\kappa t$ для любой точки (s,t); (2) множество $\{v\in u: L_\nu(v)\geqslant 0\}$ является препятствием при всех ν от 1 до n.

Доказательство. Предположим сначала, что есть $L_1(\cdot),$ $\ldots, L_n(\cdot)$, $\kappa>0$, обладающие свойствами (1), (2) и докажем, что $\sigma=\{0\}$. Допустим обратное: $v=(s,t)\in\sigma, v\neq 0$. Конечно, здесь $t<0$. Поскольку $\sum\limits_{\nu=1}^{n} L_\nu(v)=\kappa t<0,$ то можно выбрать такое ν, при котором $L_\nu(v)<0,$ а следовательно, и $L_\nu(\ell v)<0$ при всех $\ell>0$. Отсюда всякое $clos(conv(A))$, а тогда и всякое $A\in H$ содержит точку a, в которой $L_\nu(a)<0$. Но это противоречит тому, что множество $\{a\in u: L_\nu(a)\geqslant 0\}$ есть препятствие.

Теперь допустим, что $\sigma=\{0\}$, и найдем нужные $L_1(\cdot),$ $\ldots, L_n(\cdot), \kappa>0$. Обозначим через F_A, где $A\in H$, множество всех однородных линейных нормированных функций $f: R^{d+1}\to R$ таких, что $f(v)\leqslant 0$ при всех $v\in ray$ $(clos(conv(A)))$. Обозначим через F объединение этих F_A по всем $A\in H$. Конечно,

$$ray(clos(conv(A)))=\{v: \forall f\in F_A\ (f(v)\leqslant 0)\}$$

для любого $A\in H$. Отсюда

$$\{v: \forall f\in F(f(v)\leqslant 0)\}=\{0\}.$$

Введем также множество $C=\{(s,t): t\leqslant -1\}$ и применим к семейству F и множеству C теорему 21.3 в /4/ (обобщенный вариант теоремы Хелли). Согласно этой теореме, существуют n функций $f_1,\ldots,f_n\in F$, где $n\leqslant d+2$, и положительные числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\varepsilon$ такие, что $\forall v\in C$: $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu f_\nu(v)\geqslant\varepsilon$. Отсюда и из определения C следует, что $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu f_\nu(s,t)=-\kappa t,$ где $\kappa>0$. Функции $L_\nu=$ $-\lambda_\nu f_\nu$, $1\leqslant\nu\leqslant n$, и число κ являются искомыми.

Доказательство теоремы 1. Допустим сначала, что $\sigma=\{0\}$. Тогда существуют $L_1(\cdot),\ldots L_n(\cdot)$, $\kappa>0$, обладающие свойствами, о которых говорится в лемме 4. Пользуясь свойством (2), можно доказать по индукции, что

$$\sup_{v\in T_B} L_\nu(v) \leqslant \sup_{v\in B} L_\nu(v)$$

для любой базы B и любого ν от 1 до n. Отсюда и из свойства (1) следует, что

$$(s,t)\in T_B \Longrightarrow \kappa t = \sum_{\nu=1}^{n} L_\nu(s,t) \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \sup_{v\in B} L_\nu(v).$$

Правая часть этого неравенства не превосходит $const\cdot\rho$, где ρ – это радиус шара, содержащего B. Это очевидно, если центр шара лежит на оси t, а потому верно и в общем случае, так как эта правая часть не меняется при сдвиге B на любой вектор $(s,0)$.

Допустим теперь, что $\sigma\neq\{0\}$. Тогда σ пересекает гиперплоскость $t=-1$, скажем, в точке $(s^0,-1)$. Перейдем к косоугольным координатам $s'=s+ts^0$, $t'=t$. При этом наша эволюция $\mathcal{E}$ превратится в другую эволюцию $\mathcal{E}'$. Конечно, $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}$ – линейно разрушающие одновременно. Множество $\sigma(\mathcal{E}')$ содержит луч $\{(0,t):t\leqslant 0\}$. Введем теперь множество Q по формуле:

$$Q=\{(s,t)\in V:\ |s|^2<\rho^2-t\tau^2\}.$$

Наша лемма следует из формулы

$$B=Q\cap I \Longrightarrow Q\subset T_B,$$

которую мы сейчас докажем по индукции. Нам надо доказать для любой точки $(s,t)\in Q\setminus I$, что

$$(Q\cap((s,t)+u))\subset(T_B\cap((s,t)+u))\Rightarrow(s,t)\in T_B. \qquad (7)$$

Это очевидно, если $s=0$, так что пусть теперь $s\neq 0$. Введем вектор $s'\in R^d$ такой, что (1) $s'=\kappa s$, где $\kappa>1$; (2) $|s'|^2<\rho^2-t\tau^2$. Обозначим через π гиперплоскость, проходящую через точку (s',t) и ортогональную к вектору $(s,0)$. Пусть η – полупространство, ограниченное гиперплоскостью π и содержащее начало координат. Из геометрических соображений следует, что

$$(\eta\cap((s,t)+u))\subset(Q\cap((s,t)+u)).$$

Отсюда и из левой части (7) следует, что

$$(\eta\cap((s,t)+u))\subset(T_B\cap((s,t)+u)).$$

Отсюда для любого препятствия A, множество $(s,t)+A$ пересекает T_B, а потому $(s,t)\in T_B$ по критерию (6).

Лемма 5. Пусть множество $Q \subset R^{d+1}$ обладает следующим свойством:

$$v \in Q \cap (V \setminus I) \Rightarrow (v + A) \cap Q \neq \emptyset \qquad (8)$$

для любого препятствия A. Тогда, взяв базу $B = Q \cap I$, получим $Q \subset T_B$.

Доказательство легко провести по индукции.

Теорема 2. Если $\sigma(\mathcal{E}) \neq \{0\}$, то каждое из следующих трех предположений:

(1) размерность d равна 1,

(2) эволюция $\mathcal{E}$ имеет конечный гандикап,

(3) множество $\sigma(\mathcal{E})$ имеет полную размерность $(d+1)$,

обеспечивает, что эволюция $\mathcal{E}$ неразрушающая. Более того, каждое из предположений (1), (2) обеспечивает существование ограниченной базы B такой, для которой $-\sigma(\mathcal{E}) \subset T_B$.

Доказательство в случаях (1), (2) сводится к нахождению непустого ограниченного множества P такого, для которого множество $Q = P - \sigma$ подчиняется формуле (8).

Случай 1. Если $d = 1$, то в качестве P можно взять открытый круг с радиусом 2τ и центром $(0, -2\tau)$ Доказательство формулы (8) в этом случае очевидно.

Случай 2. Здесь нам понадобятся определение и две леммы.

Определение 3. Назовем множество $P \subset R^{d+1}$ тупым для множества $A \subset R^{d+1}$, если

$$\forall v \in R^{d+1} \, ((P+v) \cap A = \emptyset \Rightarrow (P+v) \cap \mathrm{conv}(A) = \emptyset).$$

Лемма 6. Если P тупое для A, то и любое $P + P'$ тупое для A.

Доказательство очевидно.

Лемма 7. Множество $-(d+1)\,\mathrm{conv}(A)$ тупое для любого A.

Доказательство. Пусть сначала A состоит из $d+2$ точек, не лежащих в одной гиперплоскости. Пусть
$P = W - (d+1)\,\mathrm{conv}(A)$
и $P \cap A = \emptyset$. Пусть $\eta : R^{d+1} \to R^{d+1}$ такая гомотетия, что $\eta(\mathrm{conv}(A)) = P$. Конечно, коэффициент η равен $-(d+1)$. Обозначим центр η через ξ, элементы множества A через a_k и пусть $v_k = \eta(a_k)$, где $1 \leqslant k \leqslant d+1$. Пусть

$$L_k : R^{d+1} \to R, \quad 1 \leqslant k \leqslant d+2$$

такая линейная функция, что $L_K(v_K)=1$ и $L_K(v_\ell)=0$ для всех $\ell\neq K$. Очевидно, что $\sum_{K=1}^{d+2} L_K(v)=1$ для любой точки $v\in R^{d+1}$, что

$$P=\{v:\ \forall K(L_K(v)\geqslant 0)\}$$

и что $\sum_{K=1}^{d+2} L_K(v_K)=d+2$. Последнее равенство, в сочетании с тем, что

$$L_K(v_K)-L_K(\xi)=(d+1)(L_K(\xi)-L_K(a_K)),$$

дает $\sum_{K=1}^{d+2} L_K(a_K)=0$. С другой стороны, для любого K, поскольку $a_K\notin P$, то существует $\ell(K)$ такое, что $L_{\ell(K)}(a_K)<0$. Здесь $\ell(K)$ не может равняться K во всех случаях. Значит, есть такие $K,\ell,K\neq\ell$, что $L_\ell(a_K)<0$. Следовательно, $\max\limits_{v\in A} L_\ell(v)<0$, а тогда и $\max\limits_{v\in conv A} L_\ell(v)<0$, откуда $P\cap conv(A)=\emptyset$, что и требовалось.

Отсюда легко вывести утверждение леммы и для того случая, когда A есть множество вершин какого-нибудь симплекса в R^{d+1}.

Пусть теперь A любое. Пусть $P=W-(d+1)conv(A)$ и P пересекает $conv(A)$. Пусть $\eta: R^{d+1}\to R^{d+1}$ та же гомотетия, что и выше. Поскольку $P=\eta(conv(A))$ пересекает $conv(A)$, то центр гомотетии ξ принадлежит $conv(A)$. По теореме Каратеодори, ξ принадлежит симплексу S с вершинами в A. Ясно, что S пересекает $\eta(S)$, откуда (по доказанному) $\eta(S)$ содержит вершину S. Итак, P пересекается с A, что и требовалось.

Теперь мы можем исследовать случай 2. Положим

$$P=int(-\mathcal{D}\sum_{A\in H} conv(A)+S_P(1)+W).$$

Здесь $int(\cdot)$ означает множество внутренних точек. Число $\mathcal{D}$ больше, чем $(d+1)$. H – конечный гандикап. $S_P(1)$ означает шар с центром 0 и радиусом 1; он добавлен, чтобы гарантировать, что P непусто. Вектор W добавлен такой, чтобы было $\forall(s,t)\in P: t\leqslant 0$. Легко доказать, что P тупое для каждого $A\in H$. Следовательно, $Q=P-\sigma$ тоже тупое для каждого $A\in H$. Докажем, что для Q выполнена формула (8). Пусть $v=Q\cap(V\setminus I)$. Это значит, что $v=(S^1,t^1)+(S^2,t^2)$, где $(S^1,t^1)\in P$, $(S^2,t^2)\in-\sigma$, $t^1+t^2\geqslant \tau$. Здесь $t^1\leqslant 0$, откуда $t^2\geqslant\tau$. Следовательно, для любого $A\in H$ множество $(S^2,t^2)+clos(conv(A))$ пересекает $-\sigma$, откуда $v+\operatorname{clos}(\operatorname{conv}(A))$ пересекает Q. Поскольку Q открытое, то $v+\operatorname{conv}(A)$ тоже пересекает Q, а поскольку Q тупое для A, то $v+A$ тоже пересекает Q, что и требовалось.

Случай 3. Если σ имеет размерность $(d+1)$, то существуют прямая ℓ, проходящая через начало координат, и число $\varepsilon>0$ такие, что всякая прямая, параллельная ℓ и отстоящая от нее не более чем на ε, пересекает $\operatorname{conv}(A)$ для любого препятствия A. Поскольку мы можем перейти к косоугольным координатам, как в теореме 1, то можно считать, что прямая ℓ совпадает с осью t. Положим $Q=\ell+P$, где P – это шар радиуса r^2/ε. Для этого Q легко доказать (8).

Теорема 3. Для любой эволюции $\mathcal{E}$ и любой ограниченной базы B существует такое число φ, что

$$T_B(\varepsilon)\subset Sp(\varphi)-\sigma(\varepsilon).$$

Для доказательства нам потребуются две леммы.

Лемма 10. Для любого препятствия A и любой базы B

$$T_B\subset B-\operatorname{ray}(\operatorname{conv}(A)).$$

Доказательство. Сначала докажем, что

$$T_B\subset B\cup(B-A)\cup(B-A-A)\cup(B-A-A-A)\cup\ldots=J. \qquad (9)$$

Последнее равенство служит определением J. Пусть (9) доказано для слоев $V_1,\ldots,V_{K-1}$, введенных в лемме 1. Пусть $v\in V_K\cap T_B$. По критерию (6) $v+A$ пересекает T_B. Поскольку $v+A$ лежит в предыдущих слоях, то $v+A$ тоже пересекает J, откуда $v\in J$. Итак, формула (9) верна. Она останется верной, если подставить в нее $\operatorname{conv}(A)$ вместо A. Но $c+c=2c$ для любого выпуклого c. Следовательно,

$$T_B\subset\bigcup_{k\in Z_+}(B-k\operatorname{conv}(A))\subset\bigcup_{k\geq 0}(B-k\operatorname{conv}(A))=$$
$$=B-\operatorname{ray}(\operatorname{conv}(A)),$$

что и требовалось.

Лемма 11. Пусть F – непустой ансамбль непустых замкнутых множеств в R^{d+1}. Тогда для любого $\rho>0$ найдется такое $\varphi>0$, что

$$\bigcap_{A\in F}(\operatorname{ray}(A+Sp(\rho))\subset\bigcap_{A\in F}\operatorname{ray}(A)+Sp(\varphi).$$

Доказательство. Допустим противное, то есть, что существует такое $\rho > 0$, что

$$\forall \varphi > 0: \left(\bigcap_{A\in F} (ray(A) + Sp(\rho))\right) \setminus \left(\bigcap_{A\in F} ray(A) + Sp(\varphi)\right) \neq \emptyset.$$

Применим гомотетию с центром O и коэффициентом $1/\varphi$ и обозначим $\varepsilon = \rho/\varphi$. Мы получим

$$\forall \varepsilon > 0: \left(\bigcap_{A\in F} (ray(A) + Sp(\varepsilon))\right) \setminus \left(\bigcap_{A\in F} ray(A) + Sp(1)\right) \neq \emptyset.$$

Отсюда и из соображений компактности следует, что

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{A\in F} (ray(A) + Sp(\varepsilon)) \setminus \left(\bigcap_{A\in F} ray(A) + int(Sp(1))\right) \neq \emptyset,$$

откуда

$$\bigcap_{A\in F} ray(A) \setminus \left(\bigcap_{A\in F} ray(A) + int(Sp(1))\right) \neq \emptyset,$$

что, очевидно, неверно.

Доказательство теоремы 3. По лемме 10

$$T_B \subset \bigcap_{A\in H} (Sp(\rho) - ray(clos(conv(A)))),$$

где $Sp(\rho)$ содержит B. Теперь теорема следует из леммы 11.

§ 3. Эволюции со случайным шумом

Здесь исследуются эволюции в присутствии малого случайного шума. В этой статье рассматривается шум лишь весьма специального вида, но позднее мы обобщим эти результаты. Пусть имеется число $\delta > 0$. Назовем δ-кубиком всякое множество следующего вида:

$$\{(s,t): p_k\delta \leqslant s_k \leqslant (p_k+1)\delta,\ 1 \leqslant k \leqslant d,\ p_0\delta \leqslant t \leqslant (p_0+1)\delta\},$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_d$ – целые числа. Обозначим через $V(\delta)$ множество всех δ-кубиков.

Для любого счетного множества W мы будем использовать следующие обозначения: $\Omega_W = \{0;1\}^W$. Элементы Ω_W имеют вид $\omega = (\omega_a)$, где $\omega_a \in \{0;1\}$, $a \in W$. Далее, $\mathcal{M}_W$ означает множество нормированных мер на Ω_W (то есть на σ-алгебре, порожденной цилиндрическими множествами в Ω_W). Для любого ε, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, введем подмножество $\mathcal{M}_W(\varepsilon) \subset \mathcal{M}_W$. Мера $\mu \in \mathcal{M}_W$ входит в $\mathcal{M}_W(\varepsilon)$, если $\mu(\omega_a = 1$ для всех $a \in A) \leqslant \varepsilon^{|A|}$, для любого конечного $A \in W$, где $|\cdot|$ означает количество элементов.

т- Конечно, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow \mathcal{M}_W(\varepsilon_1) \subset \mathcal{M}_W(\varepsilon_2)$.

Выберем эволюцию $\mathcal{E}$. Для любого $\delta > 0$ введем отображение F_δ, действующее на $\Omega_{V(\delta)}$. Для всякого $\omega \in \Omega_{V(\delta)}$ соответствующий образ $F_\delta(\omega)$ есть состояние в V, определенное следующим образом. Точка $v \in V$ входит в $F_\delta(\omega)$, если выполняется хотя бы одно из следующих двух условий: (1) $\omega_x = 1$, где x – это δ– кубик, содержащий v; (2) $v \in V \setminus I$ и $(u \cap (F_\delta(\omega) - v)) \in E$. Как и в случае леммы 1, легко доказать по индукции, что любому $\omega \in \Omega_{V(\delta)}$ соответствует единственное $F_\delta\,\omega)$. Обозначим через $P_\delta(v, \mu)$ вероятность по мере μ на $\Omega_{V(\delta)}$ того, что $v \in F_\delta(\omega)$. Обозначим также

$$P_\delta = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\substack{v \in V \\ \mu \in \mathcal{M}_{V(\delta)}(\varepsilon)}} P_\delta(v, \mu).$$

Этот предел существует, так как супремум монотонно зависит от ε.

Лемма 12. Величина P_δ не зависит от $\delta > 0$. Ее доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма 13. Пусть V_1 и V_2 счетные множества. Для каждого $x \in V_1$ задано множество $N(x) \subset V_2$, причем существуют такие константы c_1, c_2, что

$$\forall x \in V_1:\ 1 \leqslant |N(x)| \leqslant c_1;\quad \forall y \in V_2:\ 1 \leqslant |\{x : y \in N(x)\}| \leqslant c_2. \tag{10}$$

Отображение $G : \Omega_{V_2} \to \Omega_{V_1}$ определяется равенством: $\omega_x = \max\limits_{y \in N(x)} \omega_y$ для всех $x \in V_1$. Тогда для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $\varepsilon_2 > 0$, что для любой меры $\mu \in \mathcal{M}_{V_2}(\varepsilon_2)$ мера на Ω_{V_1}, индуцированная мерой μ при отображении G, принадлежит $\mathcal{M}_{V_1}(\varepsilon_1)$.

Доказательство. Предоставляем читателю исследовать два частных случая: когда $c_1 = 1$ и когда $c_2 = 1$. Если $c_1 = 1$, то можно взять $\varepsilon_2 = (\varepsilon_1)^{c_2}$. Если $c_1 = 1$, то можно взять $\varepsilon_2 = 1 - (1 - \varepsilon_1)^{1/c_1}$. Наша лемма сводится к этим двум случаям путем введения промежуточного множества

$$V_3 = \{(x, y) :\ x \in V_1,\ y \in N(x)\}$$

и отображений $G_1 : \Omega_{V_3} \to \Omega_{V_1}$ и $G_2 : \Omega_{V_2} \to \Omega_{V_3}$, определенных по формулам:

$$\omega_x = \max_{y \in N(x)} \omega_{(x,y)},\quad \omega_{(x,y)} = \omega_y,\quad x \in V_1,\ y \in N(x).$$

Конечно, $G = G_1 G_2$. Отображения G_1 и G_2 подчиняются указанным двум частным случаям. Таким образом, в общем случае можно взять зависимость ε_2 от ε_1 как суперпозицию указанных зависимостей, то есть

$$\varepsilon_2 = [1-(1-\varepsilon_1)^{1/c_1}]^{c_2}.$$

Доказательство леммы 12. Пусть δ_1 и δ_2 – два значения δ. Докажем, что $P_{\delta_1} \geqslant P_{\delta_2}$, сопоставив каждому $\varepsilon_1 > 0$ такое $\varepsilon_2 > 0$, что

$$\forall v \in V: \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{V(\delta_1)}(\varepsilon_1)} P_{\delta_1}(v,\mu) \geqslant \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{V(\delta_2)}(\varepsilon_2)} P_{\delta_2}(v,\mu). \quad (11)$$

Для любого δ_1-кубика x обозначим через $N(x)$ множество δ_2-кубиков, пересекающих x. Конечно, условие (10) выполняется. Зависимость ε_2 от ε_1, полученная в лемме 13 и примененная к данному случаю, влечет (11). Действительно, левая часть (11) не меньше, а правая часть не больше, чем супремум $Q_{\delta_2}(v,\mu)$ по $\mu \in \mathcal{M}_{V(\delta_2)}(\varepsilon_2)$. Здесь $Q_{\delta_2}(v,\mu)$ означает вероятность по мере μ на Ω_2 того, что $v \in F_{\delta_1}(G(\omega))$, где G было введено в лемме 13.

На основании леммы 12, мы теперь опустим индекс δ и будем писать $P(\varepsilon)$ вместо P_δ. В этом параграфе мы докажем следующие две теоремы.

Теорема 4. Если эволюция $\mathcal{E}$ линейно разрушающая, то $P(\varepsilon) = 0$.

Теорема 5. Если эволюция $\mathcal{E}$ неразрушающая, то $P(\varepsilon) = 1$.

Аналог этих теорем для дискретного случая был опубликован как теорема 5 в /3/. Но в настоящем случае (в отличие от дискретного), возможны нелинейно разрушающие эволюции (см. пример 2 ниже). Величина $P(\varepsilon)$ для них нам неизвестна; возможно, $P(\varepsilon) = 1$ для всех них. Теперь мы приведем леммы, на которых основаны доказательства теорем. Назовем эволюцию δ-кубичной, если у нее есть гандикап, все элементы которого – объединения δ-кубиков.

Лемма 14. Всякая δ-кубичная эволюция, $0 < \delta < 1$, сопоставляет всякой базе, состоящей из δ-кубиков, траекторию, также состоящую из δ-кубиков.

Доказательство. Разрежем множество V на слои толщины δ:

$$V_K = \{(s,t): (K-1)\delta \leq t \leq K\delta\}, \quad K = 1, 2, 3, \ldots$$

и докажем по индукции, что, если B состоит из δ-кубиков, то и каждое пересечение $V_K \cap T_B$ состоит из δ-кубиков. Пусть это доказано для $V_1, \ldots, V_{K-1}$. Теперь применим формулу, доказываемую непосредственно:

$$T_B \cap V_K = \left(\bigcap_{A \in H} \left(T_B \cap \left(\bigcup_{\ell=1}^{K-1} V_\ell\right)\right) - A\right) \cap V_K .$$

Вообще, если множества C и $\mathcal{D}$ состоят из δ-кубиков, то и $C \cap \mathcal{D}$ и $C - \mathcal{D}$ тоже. Применяя это соображение к правой части нашей формулы, мы доказываем индукционное утверждение для V_K, что и требовалось.

<u>Лемма 15.</u> Если $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$, то $P(\mathcal{E}_1) \leq P(\mathcal{E}_2)$.

<u>Доказательство</u> легко провести, пользуясь соображениями монотонности, развитыми, например, в /5/, §2.

<u>Лемма 16.</u> Для любой неразрушающей эволюции $\mathcal{E}$ есть такая ограниченная база B, что

$$\forall t \geq 0 \quad \exists s: \quad (s,t) \in T_B(\mathcal{E}).$$

<u>Доказательство.</u> Пусть B' – ограниченная база с бесконечным временем жизни. Тогда

$$\forall t \geq 0 \quad \exists s', t': \ t \leq t' \leq t + R, \quad (s,t') \in T_{B'}(\mathcal{E}),$$

так как, если бы это было неверно при каком-то $t \geq 0$, то траектория $T_{B'}$ не содержала бы точек $(s,t'): t' \geq t$. Положим, $P = \{(0,t): -r \leq t \leq 0\}$ и $Q = T_{B'} + P$. Конечно, $\forall t \geq 0$ $\exists s: (s,t) \in Q$. Отсюда, база $B = Q \cap I$ является искомой, так как $Q \subset T_B$.

<u>Доказательство</u> теоремы 4. Для δ-кубичных эволюций утверждение теоремы есть очевидно следствие теоремы 5 в /3/ и нашей леммы 14. Пусть теперь $\mathcal{E}$ – любая линейно разрушающая эволюция. Тогда $\sigma(\mathcal{E}) = \{0\}$ по теореме 1. Покроем каждое препятствие A эволюции $\mathcal{E}$ объединением A_δ δ-кубиков, пересекающихся с A, и примем совокупность этих A_δ за гандикап новой эволюции $\mathcal{E}_\delta$. Легко доказать (особенно, если вспомнить лемму 4), что $\sigma(\mathcal{E}_\delta) = \{0\}$ при достаточно малых $\delta > 0$. Значит, $P(\mathcal{E}_\delta) = 0$ для этих δ. С другой стороны, $\mathcal{E} < \mathcal{E}_\delta$ при всех δ. Следовательно, $P(\mathcal{E}) = 0$, что и требовалось.

<u>Доказательство</u> теоремы 5. Положим $\delta = 1$. Фактически мы докажем, что для любого $\mathcal{E} > 0$ есть такая мера $\mu \in \mathcal{M}_{V(1)}(\mathcal{E})$, что $\sup\limits_{v \in V} P_1(v, \mu) = 1$. В качестве μ мы

возьмем бернуллиевскую меру μ_ε, для которой
$\mu_\varepsilon(\omega_x=1$ при всех $x\in A) = \varepsilon^{|A|}$,
при всех конечных $A\subset V(1)$.

Согласно лемме 16, есть такая ограниченная база B, что

$$\forall t\geqslant 0 \quad \exists s:(s,t)\in T_B.$$

Обозначим через $s(t)$ значение s, сопоставляемое t этой формулой; то есть

$$\forall t\geqslant 0:(s(t),t)\in T_B.$$

Из свойств отображения F_1 следует, что для любой точки $(s^1,t^1)\in V$ и любого $t\geqslant 0$

$$(B+(s^1,t^1))\subset F_1(\omega)\Longrightarrow(s^1+s(t),t^1+t)\in F_1(\omega).$$

Обозначая $s^1+s(t)=s^0$, $t^1+t=t^0$, переформулируем это в следующем виде. Условие $(s^0,t^0)\in F_1(\omega)$ будет гарантировано, если найдется такое t, $0\leqslant t\leqslant t^0$, что

$$B+(s^0-s(t),\ t^0-t)\subset F_1(\omega).$$

Последнее условие будет обеспечено, если ω таково, что "$\omega_x=1$ для всех δ-кубиков x, пересекающихся с $B+(s^0-s(t),\ t^0-t)$". Вероятность условия в кавычках по мере μ_ε не меньше, чем положительная константа $\gamma>0$ при всех t (если δ,ε,B фиксированы). С другой стороны, для значений t, кратных $\tau+1$, условия в кавычках независимы друг от друга. Следовательно, вероятность того, что выполняется хотя бы одно условие в кавычках, не меньше, чем

$$1-(1-\gamma)^{[t^0/\tau+1]}.$$

При $t^0\to\infty$ эта величина стремится к 1, что и требовалось.

§ 4. Примеры

Здесь мы представим три конкретные эволюции. Каждую из них мы зададим с помощью гандикапа H. Для всех них $d=2$, то есть $V=R^2\cdot R_+$, и все $A\in H$ лежат в плоскости $t=-1$. Так что, по существу, время дискретно, и можно рассматривать лишь целые значения t.

Пример 1. Выберем в плоскости $t=-1$ равносторонний треугольник T с центром (0, 0, –1). Элементы H это многоугольные области в T, площади которых вдвое меньше площади T.

Легко проверить, что эта эволюция $\mathcal{E}$ линейно разрушающая. Можно рассмотреть также двойственную к ней эволюцию $\bar{\mathcal{E}}$. Очевидно, $\bar{\mathcal{E}} < \mathcal{E}$, откуда $\bar{\mathcal{E}}$ тоже линейно разрушающая. Вообразим, что эволюция $\mathcal{E}$ действует при наличии двустороннего шума, способного случайно как добавлять, так и вырезать δ-кубики. Как пустое множество, так и все V являются устойчивыми траекториями для $\mathcal{E}$ при наличии такого шума.

Пример 2. Элементы H – это половины, то есть дуги по 180°, окружности

$$\{(s, t): |s| = 1, \quad t = -1\}.$$

Эта эволюция разрушающая, но нелинейно. Если взять в качестве базы круг радиуса r_0 в плоскости $t = 0$, то траектория будет состоять из кругов радиусов $r_t = \sqrt{r_0^2 - t}$ в плоскостях $t = 0, 1, 2, \ldots$ Время жизни этой базы равно $\sqrt{r_0} + O(1)$. Мы не знаем, что произойдет с этой эволюцией, если добавить случайный шум.

Пример 3. Выберем в плоскости $t = -1$ квадрат Q со стороной 1 и центром (0, 0, –1). Элементы H – это все четверки точек, лежащих по одной на всех сторонах Q.

Эта эволюция неразрушающая. Квадрат Q' в плоскости $t = 0$ со стороной $\sqrt{2}$ и сторонами, параллельными диагоналям Q, имеет бесконечное время жизни, так как порождает равные квадраты в моменты $t = 1, 2, \ldots$ Но теорема 2 здесь неприменима, поскольку ни одно из ее условий не выполняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Н.Б., Петровская М.Б., Пятецкий-Шапиро И.И. Моделирование голосования со случайной ошибкой. – "Автоматика и телемеханика", 1969, т. 10, с. 103–107.
2. Тоом А.Л. Монотонные бинарные мозаичные автоматы. – "Проблемы передачи информации", 1976, т. 12, в.1, с.48–54.
3. Тоом А.Л. Устойчивые и притягивающие траектории в многокомпонентных системах. – В сб.: "Многокомпонентные случайные системы". М., "Наука", 1977.
4. Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. М., "Мир", 1973.
5. Митюшин Л.Г. Неэргодичность однородных пороговых сетей при малом самовозбуждении. – "Проблемы передачи информации", 1970, т.6, в. 3, с. 99–103.