АКАДЕМИЯ НАУК СССР
НАУЧНЫЙ ЦЕНТР БИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

редакционная коллегия:
д-р физ.-мат. наук проф. *Р.Л.Добрушин*
канд. физ.-мат. наук *В.И.Крюков*
канд. физ.-мат. наук *А.Л.Тоом*

ПУЩИНО • 1982

УДК 519.21:57

Сборник посвящен новому математическому направлению, быстро развивающемуся на стыке теории вероятностей, статистической физики, теории информации, математической биологии. Методы этой теории дают возможность по-новому взглянуть на важнейшие математические проблемы, связанные с коллективным поведением большого числа локально взаимодействующих компонент, и в свою очередь испытывают влияние разнообразных биологических приложений.

Сборник составлен на основе докладов, прочитанных на заседаниях и семинарах III Школы по взаимодействующим марковским процессам в биологии, состоявшейся в г. Пущине в марте 1981 г. Характерная особенность этой школы по сравнению с двумя предыдущими — возросшее число биологически ориентированных работ и расширение тематики приложений к различным биологическим системам, среди которых, помимо традиционных для нас нейронных сетей и растительных сообществ, были представлены модели популяционной генетики, морфогенеза, кровообращения, иммунитета.

Сборник представляет интерес для математиков, биофизиков и инженеров, занимающихся моделированием сложных биологических процессов.

Ответственный за выпуск канд. физ.-мат. наук *В.И.Крюков*
Редакционная коллегия:
д-р физ.-мат. наук проф. *Р.Л.Добрушин*
канд. физ.-мат. наук *В.И.Крюков*
канд. физ.-мат. наук *А.Л.Тоом*

ОЦЕНКИ ДЛЯ МЕР, ОПИСЫВАЮЩИХ ПОВЕДЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ СИСТЕМ С ЛОКАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

А.Л.Тоом

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Все больший интерес привлекают вероятностные процессы с управлением, то есть такие, в которых параметры задаются реализацией некоторого другого вероятностного процесса. Ясно, что эту конструкцию можно итерировать, считая, что параметры этого другого процесса задаются реализацией третьего и т.д. конечное число раз. В данной статье этот принцип применяется для обобщения результатов о неэргодичности некоторых систем с локальным взаимодействием, таких как задача Ставской [1], задача голосования [2] и т.п.

При доказательстве неэргодичности подобных систем [3, 4, 5] фактически доказывается, что, если автоматы редко «ошибаются», то они редко находятся в «неправильных» состояниях (хотя «неправильность» автомата может быть обусловлена чужими ошибками в далеком прошлом). Но слово «редко», дважды встречающееся в предыдущей фразе, имеет в этих двух случаях различный смысл. Во всех до сих пор проведенных доказательствах этого рода требовалось, чтобы наличие ошибок в любых k точках пространственно-временной решетки имело вероятность, не превышающую ε^k, где ε — малый параметр. Для автоматов же аналогичное условие заведомо не выполняется, так как вероятность наличия «неправильностей» в некоторой области оценивается экспонентой, в показателе которой — всего лишь диаметр этой области, а не число точек в ней. Именно оценки подобного рода доказываются здесь по индукции. Для этого условие, накладываемое на «ошибки», ослабляется, а утверждение, доказываемое о «неправильностях», усиливается, так что различие между ними становится лишь количественным.

1. Определения и формулировки

$X = 2^{Z^d}$ — совокупность всех подмножеств d-мерного целочисленного пространства Z^d с единичными векторами $e_1, \ldots, e_d$ в качестве базиса. Для всякого $x \subseteq Z^d$ обозначим

$$1(x) = \{y : x \subseteq y \subseteq Z^d\}.$$

$\mathcal{M}$ — совокупность нормированных мер на X, точнее на σ-алгебре, порожденной всеми множествами $1(x)$ для конечных x. Мера μ множества $S \subseteq X$ обозначается $\mu(S)$ или μS. Выберем в Z^d норму $\|\cdot\|$ и введем метрику $\varrho(a,b)=\|a-b\|$. Для всякого $S\subset Z^d$ обозначим через $\varrho(S)$ диаметр S и положим $\varrho_1(a,b)=\varrho(a,b)+1$, $\varrho_1(S)=\varrho(S)+1$. Выберем конечное множество $\delta\subset Z^d$, содержащее точки $0, e_1,\ldots,e_d$ и центрально-симметричное относительно 0, и назовем его шаблоном. Назовем две точки близкими, если их разность принадлежит δ. Назовем цепочкой всякую последовательность точек в Z^d, в которой каждые две последовательные точки близки. Назовем множество $S\subseteq Z^d$ связным, если для любых двух его точек в нем есть цепочка с концами в этих точках. Всякое подмножество $x\subseteq Z^d$ распадается на связные компоненты, которые будем называть x-кластерами. Для любых множеств $S_1, \ldots, S_n\subseteq Z^d$ определим $\Delta(S_1,\ldots,S_n)\subset X$ как совокупность тех подмножеств Z^d, в которых $S_1,\ldots,S_n$ принадлежат различным кластерам. Иными словами, $x\in\Delta(S_1,\ldots,S_n)$, если и только если каждые две точки, принадлежащие одному S_i, $1\leqslant i\leqslant n$, связаны в x цепочкой, а каждые две точки, принадлежащие различным S_i, S_j, $1\leqslant i<j\leqslant n$, не связаны в x цепочкой.

Для каждого значения параметра $\varepsilon\in[0;1]$ определим множество $\mathcal{M}_\varepsilon(\delta)\subseteq\mathcal{M}$: мера μ входит в $\mathcal{M}_\varepsilon(\delta)$, если для всякого натурального n и всяких непустых конечных множеств $S_1, \ldots, S_n\subseteq Z^d$ выполняется неравенство

$$\mu\Delta(S_1,\ldots,S_n)\leqslant\varepsilon^{\varrho_1(S_1)+\ldots+\varrho_1(S_n)}.$$

Очевидно, определение $\mathcal{M}_\varepsilon(\delta)$ обусловлено нормой и шаблоном. Однако зависимость $\mathcal{M}_\varepsilon(\delta)$ от нормы для нас несущественна, что вытекает из следующего.

Замечание 1. Для любых двух норм $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ существует такая функция $\varphi(\varepsilon)$, стремящаяся к нулю вместе с ε, что:

$$\forall\varepsilon,\delta : \mathcal{M}_\varepsilon(\|\cdot\|,\delta)\subseteq\mathcal{M}_{\varphi(\varepsilon)}(\|\cdot\|',\delta).$$

Итак, фиксируем норму и больше ее не упоминаем. Полезны также следующие Замечания.

Замечание 2. Если $\mu\in\mathcal{M}_\varepsilon(\delta)$, то

$$\forall v\in Z^d : \mu 1(v)\leqslant\varepsilon.$$

Замечание 3. Мы получим эквивалентное определение $\mathcal{M}_\varepsilon(\delta)$, если потребуем выполнения неравенств (1) лишь для тех случаев, когда каждое из множеств $S_1, \ldots, S_n$ содержит одну или две точки.

Замечание 4. Если $\mu\in\mathcal{M}_\varepsilon(\delta)$, где $\varepsilon<1$, то мера μ множества всех конфигураций, содержащих бесконечные кластеры, равна нулю. Поэтому в разделе 2 мы не будем рассматривать бесконечные кластеры.

Приступим к формулировке Предложений. Первое из них проясняет зависимость $\mathcal{M}_\varepsilon(\delta)$ от δ, к сожалению, довольно существенную, как видно из его второй части (но Предложение 7 покажет, как избавиться от этой зависимости).

Предложение 1. *Пусть* δ_1 *и* δ_2 *— шаблоны. 1) если* $\delta_1 \subseteq \delta_2$ *или* $d=1$, *то существует такая функция* $\varphi(\varepsilon)$, *стремящаяся к нулю вместе с* ε, *что*

$$\forall \varepsilon : \mathcal{M}_\varepsilon(\delta_1) \subseteq \mathcal{M}_{\varphi(\varepsilon)}(\delta_2);$$

2) пусть $d \geqslant 2$ *и непуста разность* $\delta_1 \setminus conv(\delta_2)$. *Тогда для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется мера* $\mu \in \mathcal{M}_\varepsilon(\delta_1)$, *не принадлежащая никакому* $\mathcal{M}_\alpha(\delta_2)$, $\alpha < 1$.

Теперь поговорим об отображениях, сохраняющих наше семейство классов мер. Все рассматриваемые здесь отображения из X в X измеримы, поэтому им соответствуют отображения из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{M}$, обозначаемые такими же буквами со звездочками. Отображения в X пишутся слева от конфигураций, а отображения в $\mathcal{M}$ пишутся справа от мер. Так, если $J: X \to X$, то μJ^* — это мера на X, индуцируемая мерой μ при отображении J. То же относится к отображениям из X^n в X. Отображение $J: X \to X$ называется монотонным, если

$$x \subseteq y \subseteq Z^d \Rightarrow Jx \subseteq Jy.$$

Отображение $J: X \to X$ называется умеренным, если из конечности $x \subset Z^d$ следует конечность Jx.

Зафиксируем шаблон δ и параметр $\lambda \geqslant 0$. Пусть каждому связному множеству $K \subseteq Z^d$ каким-либо образом сопоставлено связное множество $q(K)$, все точки которого отстоят от K не далее, чем на $\lambda \varrho_1(K)$. Определим отображение $Q: X \to X$ следующим образом: $Q(x)$ есть объединение множеств $q(K)$ по всем x-кластерам K.

Предложение 2. *Существует такая функция* $\varphi(\varepsilon)$, *стремящаяся к нулю вместе с* ε, *что для любого отображения* Q, *определенного выше, верно следующее: если* $\mu \in \mathcal{M}_\varepsilon(\delta)$, *то* $\mu Q^* \in \mathcal{M}_{\varphi(\varepsilon)}(\delta)$.

Для каждого натурального n определим отображение $V: X^n \to X$ следующим образом: $V(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cup \ldots \cup x_n$.

Предложение 3. *Для любого* n *существует функция* $\varphi(\varepsilon)$, *стремящаяся к нулю при* $\varepsilon \to 0$, *при которой верно следующее. Если мера* μ *на* X^n *имеет проекции на каждое* X, *принадлежащие множеству* $\mathcal{M}_\varepsilon(\delta)$, *то* $\mu V^* \in \mathcal{M}_{\varphi(\varepsilon)}(\delta)$.

Определим теперь наиболее важный для нас класс отображений из X в X, которые мы будем называть автоматными отображениями или A-отображениями. Чтобы задать A-отображение, надо иметь подмножество $E \subseteq X$, называемое ансамблем. Тогда соответствующие отображения F и A из X в X определяются следующими равенствами, где $x \in X$:

$$Fx = \{a \in Z^d : (x - a) \in E\} \cup x,$$

$$Ax = \bigcup_{n=0}^{\infty} F^n x.$$

Наложим три дополнительных требования:

1) Предположим, что

$$(x \in E,\ x \subset y \subseteq Z^d) \Rightarrow y \in E;$$

в этом случае соответствующие F и A монотонны.

2) Предположим, что существует такое конечное множество $U \subset Z^d$, что принадлежность x к E зависит лишь от пересечения $x \cap U$. Иными словами, существует такой ансамбль $E_U \subseteq 2^U$, что

$$x \in E \Leftrightarrow (x \cap U) \in E_U.$$

Если такое U существует, то можно считать, что U минимальное из всех возможных.

3) Предположим, что $0 \notin conv(U)$, то есть точка 0 не принадлежит выпуклой оболочке U. Это эквивалентно тому, что существует такой однородный линейный функционал $L: Z^d \to R$, что

$$\forall a \in U: L(a) < 0.$$

Так построенное отображение A при условиях 1), 2), 3) будем называть A-отображением. По существу, задать A-отображение — это все равно, что задать МБТ в [5], и свойство A-отображения «быть умеренным» — то же, что свойство МБТ иметь траекторию «все нули» притягивающей и что свойство оператора в [6] быть размывающим.

Обозначим через B_ε бернуллиевскую меру на X, задаваемую равенствами:

$$\forall S \subset Z^d: B_\varepsilon 1(S) = \varepsilon^{|S|}.$$

Теорема. *Для всякого натурального n и всяких умеренных A-отображений $A_1, \ldots, A_n$ существуют такой шаблон δ и такая функция $\varphi(\varepsilon)$, стремящаяся к нулю при $\varepsilon \to 0$, что*

$$B_\varepsilon A_1^* A_2^* \ldots A_{n-1}^* A_n^* \in \mathcal{M}_{\varphi(\varepsilon)}(\delta).$$

Эта теорема легко доказывается по индукции с использованием Предложений 4, 5, из которых первое служит индукционным переходом, а второе — базой индукции.

Предложение 4. *Для всякого умеренного A-отображения A существует такой шаблон δ_0 и такая функция $\varphi(\varepsilon)$, стремящаяся к нулю вместе с ε, что при $\delta_0 \subseteq \delta$ из $\mu \in \mathcal{M}_\varepsilon(\delta)$ следует $\mu A^* \in \mathcal{M}_{\varphi(\varepsilon)}(\delta)$.*

Предложение 5. *Существует такая функция $\varphi(\varepsilon)$, стремящаяся к нулю вместе с ε, что $B_\varepsilon \in \mathcal{M}_{\varphi(\varepsilon)}(\delta)$.*

Утверждение 2) Предложения 1 показывает, что определение $\mathcal{M}_\varepsilon(\delta)$ неудачно: это множество слишком сильно зависит от δ. Приведем еще одно утверждение такого же характера. Для этого частично упорядочим $\mathcal{M}$, следуя /7/. Назовем множество $S \subseteq X$ полным сверху, если

$$(x \in S,\ x \subset y \subseteq Z^d) \Rightarrow y \in S.$$

Скажем, что $\mu < \nu$, если $\mu(S) \leqslant \nu(S)$ для всякого S полного сверху.

Предложение 6. *Пусть $d > 1$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ и шаблона δ найдутся такие μ и ν, что $\mu < \nu$, $\nu \in \mathcal{M}_\varepsilon(\delta)$, но μ не принадлежит никакому $\mathcal{M}_\alpha(\delta)$, $\alpha < 1$.*

Чтобы избавиться от неудобств, демонстрируемых утверждением 2) Предложения 1 и Предложением 6, введем новые множества $\mathcal{M}^1_\varepsilon(\delta)$. Мера μ входит в $\mathcal{M}^1_\varepsilon(\delta)$, если и только если существует такая мера $\nu \in \mathcal{M}_\varepsilon(\delta)$, что $\mu < \nu$.

Предложение 7. *1) Для любых шаблонов δ_1 и δ_2 существует такая функция $\varphi(\varepsilon)$, стремящаяся к нулю вместе с ε, что*

$$\forall \varepsilon : \mathcal{M}^1_\varepsilon(\delta_1) \subseteq \mathcal{M}^1_{\varphi(\varepsilon)}(\delta_2);$$

2) Утверждения всех Замечаний, Предложений и Теоремы данной работы, кроме утверждения 2) Предложения 1 и Предложения 6, остаются верными, если заменить в них $\mathcal{M}_\varepsilon(\delta)$ на $\mathcal{M}^1_\varepsilon(\delta)$ и $\mathcal{M}_{\varphi(\varepsilon)}(\delta)$ на $\mathcal{M}^1_{\varphi(\varepsilon)}(\delta)$. При этом Предложение 2 можно усилить, выбросив требование связности множеств $q(k)$ в определении Q.

2. Доказательство основного утверждения

Самое трудное из доказательств — это доказательство Предложения 4. Только его мы и приводим. Это доказательство похоже на доказательство Теоремы 1 в [5], и мы будем по возможности на него ссылаться для экономии места.

Лемма 1. *Для всякого A-отображения A следующие три условия эквивалентны друг другу:*

1) A умеренное.

2) Существует такое натуральное $n \leqslant d$, такое число $r > 0$ и такие n однородных линейных функционалов $L_1, \ldots, L_n : Z^d \to R$, сумма которых тождественно равна нулю, что для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ верно следующее: если $x \in E$, то в множестве $x \cap U$ есть такая точка v_k, где $L_k(v_k) \geqslant r$.

3) Существует такая константа λ, что верно следующее. Если $k_1, \ldots, k_m$ — полный список x-кластеров, принадлежащих Ax-кластеру K, то

$$\varrho_1(K) \leqslant \lambda(\varrho_1(K_1) + \ldots + \varrho_1(K_m)).$$

Лемма 1 — лишь незначительное усиление того утверждения, которое получается, если соединить Теорему 6′ и Лемму 12 в [5], поэтому не будем ее доказывать. Поскольку мы рассматриваем умеренное A-отображение, для него все три условия Леммы 1 выполняются.

Отныне мы фиксируем A-отображение A.

Полагаем:

$$\delta_0 = \{0, \pm e_1, \ldots, \pm e_d, \pm(U-U)\}.$$

Все величины, постоянные при этих данных, называем константами. В частности, константой является n — число функционалов в условии 2) Леммы 1. Опишем сначала нужные нам понятия.

Обозначим $N=\{1,2,\ldots,n\}$ и назовем полюсником на произвольном множестве S любое отображение $\pi: N \to S$. Полюсник на множестве вершин графа назовем реберником, если область его значений $\pi(N)$ — два конца одного ребра. Полюсник π на Z^d назовем связкой, если $\pi(N)$ состоит из двух точек, разность которых принадлежит множеству $\delta+\delta+\delta$. Полюсник π на Z^d назовем k-стрелкой, где $k \in N$, или стрелкой, выходящей из точки d, если $\pi(N \setminus k)=a$, $\pi(k) \in a+U$ и $L_k(\pi(k)) \geqslant L_k(a)+r$.

Две конечные последовательности полюсников считаем эквивалентными, если они отличаются лишь порядком членов, и полученные классы эквивалентности называем пучками. Для всякого пучка $\Pi=(\pi_1,\ldots,\pi_m)$ обозначаем

$$\Pi(N) = \pi_1(N) \cup \ldots \cup \pi_m(N).$$

Через $\Pi_1 * \Pi_2$ обозначаем пучок, получаемый приписыванием последовательностей Π_1 и Π_2 подряд одна за другой. Пучок $(\pi_1,\ldots,\pi_m)$ на множестве S назовем p-ровным или ровным на множестве $Q \subseteq S$, если для всякого $k \in N$ ровно p членов последовательности $\pi_1(k),\ldots,\pi_m(k)$ принадлежит Q. Пучок назовем всюду ровным на Q, если он ровен на каждом элементе Q. Пучок на S назовем всюду ровным, если он всюду ровен на S. Обозначим через $|\Pi|$ количество полюсников в Π.

Лемма 2. *Существует такая константа c, при которой верно следующее. Если пучок Π_1 состоит только из стрелок, пучок Π_2 состоит только из связок и пучок $\Pi_1 * \Pi_2$ всюду ровен, то $|\Pi_1| \leqslant c \cdot |\Pi_2|$.*

Доказательство. См. Леммы 1 и 2 в [5].

Сопоставим каждому пучку Π граф $\Gamma(\Pi)$ с множеством вершин $\Pi(N)$, в котором две вершины соединены ребром, если они служат полюсами одного полюсника, входящего в Π. Назовем пучок Π связным, если граф $\Gamma(\Pi)$ связен.

Лемма 3. *Пусть задан полюсник π_0 на множестве вершин связного графа. Тогда существует такой связный пучок Π реберников на этом графе, что пучок $(\pi_0) * \Pi$ связен и либо 0-ровен, либо 1-ровен на каждой вершине графа, причем число вершин в множестве $[(\pi_0) * \Pi](N)$ на единицу больше числа полюсников в Π.*

Доказательство. См. Лемму 4 в [5].

Теперь сопоставим каждой точке $a \in Ax$ три пучка $\Pi_1(a)=\Pi_1$, $\Pi_2(a)=\Pi_2$ и $\Pi_3(a)=\Pi_3$ на Z^d, удовлетворяющие следующим шести условиям, где Π_0 означает пучок, состоящий из одного полюсника, все полюса которого совпадают с точкой a:

1) пучок $\Pi_0 * \Pi_1 * \Pi_2 * \Pi_3$ связен и всюду ровен;

2) пучок $\Pi_0 * \Pi_1 * \Pi_2$ всюду ровен на $Ax \setminus x$;

3) пучок $\Pi_0 * \Pi_1 * \Pi_2$ либо 0-ровен, либо 1-ровен на каждом x-кластере;

4) число тех x-кластеров, на которых 1-ровен пучок $\Pi_0 * \Pi_1 * \Pi_2$, равно $|\Pi_2|+1$;

5) множество $(\Pi_0 * \Pi_1 * \Pi_2)(N)$ принадлежит одному Ax-кластеру;

6) число $|\Pi_3|$ не превышает константы, умноженной на сумму диаметров тех x-кластеров, где 1-ровен пучок $\Pi_0 * \Pi_1 * \Pi_2$.

Мы получим эти пучки в результате следующего индукционного построения. Положим $Q=min\{m : a \in F^m x\}$ и при q убывающем от Q до нуля построим три пучка Π_1^q, Π_2^q и Π_3^q, удовлетворяющие шести индукционным условиям, получающимся из шести написанных выше условий заменой x на $F^q x$.

База индукции: $q=Q$. В этом случае все три пучка полагаем пустыми. Выполнение всех шести условий очевидно.

Индукционное построение и доказательство ведутся одновременно: построив Π_1^q, Π_2^q, Π_3^q, где $q>0$, и доказав, что все шесть индукционных условий для них выполняются, мы, опираясь на доказанное, строим Π_1^{q-1}, Π_2^{q-1}, Π_3^{q-1} и доказываем все шесть свойств для них. Опишем этот шаг индукции.

Пусть Π_1^q, Π_2^q, Π_3^q построены и все шесть свойств для них доказаны. Пусть $K_1, \ldots, K_m$ — те $F^q x$-кластеры, где 1-ровен пучок $\Pi_0 * \Pi_1^q * \Pi_2^q$. Пучки Π_1^{q-1}, Π_2^{q-1} и Π_3^{q-1} получаются из пучков Π_1^q, Π_2^q и Π_3^q в три этапа. На каждом этапе выполняется m взаимно-независимых перестроек, по одной для каждого из $K_1, \ldots, K_m$. Опишем перестройки для K_1; остальные аналогичны.

I этап: построение пучка Π_1^{q-1}. Он получается из Π_1^q добавлением некоторого пучка $\Pi^{(1)} * \ldots * \Pi^{(m)}$, где $\Pi^{(i)}$ соответствует K_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Опишем $\Pi^{(1)}$; остальные строятся аналогично.

По предположению, полюсники пучка $\Pi_0 * \Pi_1^q * \Pi_2^q$ имеют в K_1 один 1-й полюс b_1, один 2-й полюс $b_2, \ldots$, один n-й полюс b_n. Если $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subseteq F^{q-1} x$, то пучок $\Pi^{(1)}$ пуст. Пусть $b_i \notin F^{q-1} x$. Значит, $b_i \in Ax \setminus x$. Тогда, по утверждению 2) Леммы 1, из точки b_i выходит такая стрелка π_i, что $\pi_i(i) \in F^{q-1} x$. Пучок $\Pi^{(1)}$ состоит из этих стрелок π_i для всех тех $i \in N$, при которых $b_i \notin F^{q-1} x$. Аналогичные пучки $\Pi^{(2)}$, $\Pi^{(m)}$ (некоторые из которых могут быть пусты) составляем для $K_2, \ldots, K_m$ и полагаем

$$\Pi_1^{q-1} = \Pi_1^q * \Pi^{(1)} * \Pi^{(2)} * \ldots * \Pi^{(m)}.$$

II этап: построение пучка Π_2^{q-1}. Он получается из Π_2^q добавлением некоторого пучка $\Pi^{(1)} * \ldots * \Pi^{(m)}$, где $\Pi^{(i)}$ соответствует K_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Опишем $\Pi^{(1)}$; остальные аналогичны.

Определим в K_i точки $d_1, \ldots, d_m$ следующим образом: если $b_i \in F^{q-1}x$, то $d_i = b_i$; в противном случае на I этапе строилась стрелка π_i, тогда полагаем $d_i = \pi_i(i)$. Пусть $K_1^1, \ldots, K_1^e$ — те $F^{q-1}x$-кластеры, которые принадлежат K_1. Из нашей формулы для δ_0 и из того, что $\delta_0 \subseteq \delta$, следует, что

$$K_1 = F(K_1^1) \cup \ldots \cup F(K_1^e).$$

Определим граф G_1 с множеством вершин $\{K_1^1, \ldots, K_1^e\}$ следующим образом: вершины K_1^i и K_1^j соединены ребром, если связно множество $F(K_1^i) \cup F(K_1^j)$. Поскольку множество K_1 связно, то граф G_1 связен. Определим на множестве его вершин полюсник π_0 по правилу: для всякого $i \in N$ полюс $\pi_0(i)$ равен тому $F^{q-1}x$-кластеру, которому принадлежит точка d_i. Сформируем пучок реберников $\bar{\Pi}^{(1)}$ на G_1, удовлетворяющий требованиям Леммы 3. Пусть $\bar{\pi}$ — какой-то реберник, входящий в $\Pi^{(1)}$ и пусть $\bar{\pi}(N) = \{K_1^i, K_1^j\}$. Поскольку множество $F(K_1^i) \cup F(K_1^j)$ связно, существуют точки $e \in K_1^i$ и $f \in K_1^j$, разность которых принадлежит $\delta + \delta + \delta$. Сопоставим ребернику $\bar{\pi}$ связку π, задаваемую формулой:

$$\forall k \in N : \pi(K) = \begin{cases} e, & \text{если } \bar{\pi}(K) = K_1^i, \\ f, & \text{если } \bar{\pi}(K) = K_1^j. \end{cases}$$

Образуем пучок $\Pi_2^{(1)}$ из так построенных связок, соответствующих всем реберникам, входящим в $\bar{\Pi}^{(1)}$. Аналогично строим пучки $\Pi_2^{(2)}, \ldots, \Pi_2^{(m)}$ для $K_2, \ldots, K_m$ и полагаем

$$\Pi_2^{q-1} = \Pi_2^q * \Pi_2^{(1)} * \ldots * \Pi_2^{(m)}.$$

III этап: построение пучка Π_3^{q-1}. Он полностью строится заново. Из проведенного построения видно, что пучок $\Pi_0 * \Pi_1^{q-1} * \Pi_2^{q-1}$ либо 0-ровен, либо 1-ровен на каждом $F^{q-1}x$-кластере. Пусть $K_1, \ldots, K_p$ — те $F^{q-1}x$-кластеры, на которых этот пучок 1-ровен. Тогда

$$\Pi_3^{q-1} = \Pi_3^{(1)} * \ldots * \Pi_3^{(p)},$$

где $\Pi_3^{(i)}$ соответствует K_i, $1 \leqslant i \leqslant p$. Опишем $\Pi_3^{(1)}$, остальные аналогичны. Полюсники пучка $\Pi_0 * \Pi_1^{q-1} * \Pi_2^{q-1}$ имеют в K_1 один 1-й полюс b_1, один 2-й полюс $b_2, \ldots$, один n-й полюс b_n.

Легко построить связное множество точек S, содержащее $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и такое, что

$$|S| \leqslant const \cdot \varrho_1(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Соединив в S каждые две близкие точки, получим связный граф γ. Определим на S полюсник π_0, положив $\pi_0(1) = b_1$, $\pi_0(2) = b_2, \ldots, \pi_0(n) = b_n$. Построим пучок реберников на γ, удовлетворяющий требованиям Леммы 3, и этот пучок примем за

$\Pi_3^{(1)}$. Пучки $\Pi_3^{(2)}, \ldots, \Pi_3^{(p)}$ для $K_2, \ldots, K_p$ строятся аналогично.

Итак, индукционное построение полностью проведено. Справедливость шести индукционных условий легко было усмотреть по ходу построения. По окончании индукции получаем пучки $\Pi_1^0, \Pi_2^0, \Pi_3^0$, которые принимаем за

$$\Pi_1 = \Pi_1(a), \quad \Pi_2 = \Pi_2(a), \quad \Pi_3 = \Pi_3(a).$$

Теперь приступим собственно к доказательству. Нам дано, что $\mu \in \mathcal{M}_\varepsilon(\delta)$. По Замечанию 3, достаточно обеспечить неравенства

$$\mu\Delta_1 \leqslant [\varphi(\varepsilon)]^{\varrho_1(a_1,b_1)+\ldots+\varrho_1(a_m,b_m)},$$

где

$$\Delta_1 = A^{-1}\Delta(\{a_1,b_1\}, \ldots, \{a_m,b_m\}).$$

Для этого покроем Δ_1 семейством множеств и оценим сумму их мер. Выберем произвольную конфигурацию $x \in \Delta_1$ и сопоставим ей множество $D(x) \subset X$.

Назовем две точки f, g родственницами, если существует x-кластер, пересекающий оба множества

$$[\Pi_1(f) * \Pi_2(f)](N) \quad \text{и} \quad [\Pi_1(g) * \Pi_2(g)](N).$$

Теперь проделаем для каждой из пар $\{a_1, b_1\}, \ldots, \{a_m, b_m\}$ некоторое построение; опишем его для пары $\{a_1, b_1\}$, для остальных пар все делается аналогично. Поскольку a_1 и b_1 принадлежат одному Ax-кластеру, в множестве Ax существует цепочка $f_1 = a_1, f_2, \ldots, f_k = b_1$. Если в этой цепочке есть две несоседние точки f_i и f_j, $j-i>1$, — родственницы, то вычеркнем все $f_{i+1}, \ldots, f_{j-1}$, стоящие в последовательности между ними. Если $f_i = f_{i+1}$, то вычеркнем f_{i+1}. После каждого вычеркивания нумеруем оставшиеся точки подряд. Так делаем, пока это возможно. В результате получаем последовательность $g_1 = a_1, g_2, \ldots, g_l = b_1$. В этой последовательности:

1) все точки различны,

2) несоседние точки — не родственницы,

3) каждые две соседние точки либо близки, либо — родственницы.

Точки $g_1, \ldots, g_l$ и аналогичным образом построенные точки для пар $\{a_2, b_2\}, \ldots, \{a_m, b_m\}$ назовем g-точками. Пусть $g_1, \ldots, g_p$ — полный список g-точек. Пусть $K_1, \ldots, k_q$ — полный список x-кластеров, пересекающихся с множеством

$$[\Pi_1(g_1) * \Pi_2(g_1) * \ldots * \Pi_1(g_p) * \Pi_2(g_p)](N).$$

Выберем в каждом K_i $1 \leqslant i \leqslant q$, две такие точки h_i и h_i', что $\varrho(h_i, h_i') = \varrho(K_i)$, назовем их h-точками и определим $D(x)$:

$$D(x) = \Delta(\{h_1, h_1'\}, \ldots, \{h_q, h_q'\}).$$

Очевидно, $x \in D(x)$, поэтому множества $D(x)$ покрывают Δ_1 и остается оценить сумму их мер. Требуемая оценка сводится к следующим двум леммам.

Лемма 4. *Существует такая константа* $\omega > 0$, *что*

$$\varrho_1(K_1) + \ldots + \varrho_1(K_q) \geqslant \omega(\varrho_1(a_1, b_1) + \ldots + \varrho_1(a_m, b_m)).$$

Доказательство. Назовем x-кластер K_i соответствующим g-точке g_j, если он пересекается с множеством

$$[\Pi_1(g_j) * \Pi_2(g_j)](N).$$

Если один x-кластер соответствует двум g-точкам, то они — родственницы. Поэтому каждой паре соответствуют свои x-кластеры. Пусть паре (a_1, b_1) соответствуют $K_1, \ldots, K_S$. Достаточно подобрать ω так, чтобы было

$$\varrho_1(K_1) + \ldots + \varrho_1(K_S) \geqslant \omega \varrho_1(a_1, b_1).$$

Эта оценка сразу следует из условия 3) Леммы 1.

Лемма 5. *Существует такая константа* Ω, *что число различных множеств* $D(x)$, *соответствующих тем* $x \in \Delta_1$, *для которых* $\varrho_1(K_1) + \ldots + \varrho_1(K_q) \leqslant R$, *не превышает* Ω^R.

Доказательство. Назовем числом шагов произвольной последовательности уменьшенное на единицу число ее членов. Существует такая константа C, что для любых двух точек a и b найдется соединяющая их цепочка с числом шагов, не превышающим $C\varrho(a,b)$. Зафиксируем C, а такую цепочку назовем короткой.

Теперь возьмем $x \in \Delta_1$, удовлетворяющее требуемому неравенству, и сопоставим ему последовательность длины $\leqslant const \cdot R$ специальных символов из конечного алфавита, кодирующую соответствующий набор пар точек $\{h_1, h_1'\}, \ldots, \{h_q, h_q'\}$. Эта последовательность состоит из m кусков, соответствующих парам $\{a_1, b_1\}, \ldots, \{a_m, b_m\}$, разделенных специальными символами. Опишем кусок, соответствующий паре $\{a_1, b_1\}$. Фактически мы построим последовательность точек $c_0, \ldots, c_W$, где $c_i - c_{i-1} \in \delta + \delta + \delta$ при всех i от 1 до W. Число W ее шагов не превысит $const[\varrho_1(K_1) + \ldots + \varrho_1(K_S)]$, где $K_1, \ldots, K_S$ соответствуют (a_1, b_1). Точки $h_1, h_1', \ldots, h_S, h_S'$ войдут в эту последовательность. i-й символ нашего куска — это пара (α_i, β_i), где $\beta_i \in \{0; 1; 2\}$, а α_i берутся из алфавита, символы которого соответствуют точкам множества $\delta + \delta + \delta$. Так α_i кодирует разность $c_i - c_{i-1}$, а о β_i скажем ниже. Обозначим

$$\Gamma_i = \Gamma(\Pi_1(g_i) * \Pi_2(g_i) * \Pi_3(g_i)).$$

Поскольку граф Γ_i связен, его можно обойти, пройдя по каждому ребру два раза и вернувшись в исходную точку. Выберем для Γ_i такой способ обхода, начинающийся и кончающийся в g_i. Ему соответствует цепочка $Ц_i$, обходящая все вершины Γ_i, число шагов в которой равно удвоенному числу ребер в Γ_i.

Теперь строим кусок, соответствующий $\{a_1, b_1\}$. Он, в свою очередь, состоит из l под-кусков, где j-й под-кусок соответствует точке g_j, $1 \leqslant j \leqslant l$. Опишем его. Пусть точке g_j соответствуют x-кластеры $K_1, \ldots, K_p$. Поскольку $\Pi(g_j)(N)$ пересекает их, то выберем по точке в каждом пересечении:

$$v_q = \Pi(g_j)(N) \cap K_q, \quad 1 \leqslant q \leqslant p.$$

Каждая из точек $v_1, \ldots, v_p$ встречается в цепочке $Ц_j$. Перенумеруем эти точки в том порядке, в каком они впервые встречаются в $Ц_j$. Итак, идя по $Ц_j$, мы сначала попадаем в v_1, потом в $v_2, \ldots$, и, наконец, в v_p. Перенумеруем x-кластер, содержащий v_l, в K_l, а две его h-точки — в h_l и h_l' для всех l от 1 до p.

Теперь строим j-й под-кусок. Из точки g_j идем по $Ц_j$, полагая значения β_i на всем этом пути равными 0, пока не дойдем до точки v_1. Затем при q, пробегающем последовательно значения $1, 2, \ldots, p$, повторяем следующую процедуру. Из точки v_q идем по короткому пути в точку h_q, полагая на всем пути $\beta_i = 0$, и лишь в точке h_q значение β_i равно 2. Оттуда идем по короткому пути в h_q', полагая на всем пути $\beta_i = 1$, и лишь в точке h_q' значение β_i равно 2. Оттуда идем по короткому пути в v_q, полагая на всем пути $\beta_i = 0$. При $q < p$ оттуда идем дальше по $Ц_j$ до первого вхождения в нее v_{q+1}, полагая на всем пути $\beta_i = 0$. Когда же q станет равно p, из точки v_p идем по $Ц_j$ в точку g_j, полагая на всем пути $\beta_i = 0$. Если $j < l$, то из точки g_j идем по короткому пути в g_{j+1}, полагая на всем пути $\beta_i = 0$. Когда же j станет равно l, построение прекращаем.

Итак, кусок, соответствующий паре (a_1, b_1), описан. Он однозначно определяет соответствующие пары h-точек: это те, которым в нашем куске присвоены значения $\beta_i = 2$ и между которыми в последовательности β_i стоят единицы. Поскольку каждый x-кластер соответствует не более чем двум g-точкам, число шагов этой цепочки не превышает константы, умноженной на

$$\sum_{i=1}^{l-1} \|g_{i+1} - g_i\| + \sum_{i=1}^{l} |\Pi(g_i)| + \sum_{i=1}^{s} \varrho(K_i),$$

где

$$\Pi(g_i) = \Pi_1(g_i) * \Pi_2(g_i) * \Pi_3(g_i).$$

Если g_i и g_{i+1} не родственницы, то $g_{i+1} - g_i \in \delta$. Если же g_i и g_{i+1} — родственницы, то, по условию 3) Леммы 1, $\|g_{i+1} - g_i\|$ не превышает константы, умноженной на сумму значений ϱ_1 от x-кластеров, соответствующих этим двум точкам. Из этих двух соображений следует, что

$$\sum_{i=1}^{l-1} \|g_{i+1} - g_i\| \leqslant const \cdot \sum_{i=1}^{s} \varrho_1(K_i).$$

Теперь докажем, что $|\Pi(g_i)|$ не превышает константы, умноженной на сумму значений ϱ_1 от x-кластеров, соответствующих g_i. Для $|\Pi_3(g_i)|$ это следует из условия 6), а для $|\Pi_2(g_i)|$ — из условия 4) в построении пучков. Тогда это выполняется и для $|\Pi_1(g_i)|$ по Лемме 2. Лемма 5 доказана.

Опираясь на Леммы 4 и 5, оценим сумму мер множеств $D(x)$. Нам надо так подобрать $\varphi(\varepsilon)$, стремящееся к нулю вместе с ε, чтобы было

$$\sum_F \varepsilon^{\varrho_1(h_1,h_1')+\ldots+\varrho_1(h_q,h_q')} \leqslant [\varphi(\varepsilon)]^{\varrho_1(a_1,b_1)+\ldots+\varrho_1(a_m,b_m)},$$

где F — совокупность всех различных $D(x)$. Представим левую часть этого неравенства как сумму ряда $\sum\limits_{r=r_0}^{\infty}\sigma_r$, где σ_r — сумма выражений вида

$$\varepsilon^{\varrho_1(h_1,h_1')+\ldots+\varrho_1(h_q,h_q')} \tag{2}$$

по всем тем $D(x)\in F$, для которых

$$r\leqslant\varrho_1(h_1,h_1')+\ldots+\varrho_1(h_q,h_q')<r+1. \tag{3}$$

Согласно Лемме 4, суммирование можно начинать с

$$r_0=\,]\omega(\varrho_1(a_1,b_1)+\ldots+\varrho_1(a_n,b_n))[.$$

Каждое из выражений (2) при условии (3) не превышает ε^r. Согласно Лемме 5, количество тех $D(x)\in F$, для которых выполняется (3), не превышает Ω^{r+1}. Поэтому $\sigma_r\leqslant\varepsilon^r\Omega^{r+1}$, откуда

$$\sum_{r=r_0}^{\infty}\sigma_r\leqslant\frac{\Omega}{1-\omega\Omega}(\varepsilon\Omega)^{r_0}.$$

Отсюда получим требуемое неравенство, положив

$$\varphi(\varepsilon)=(2\varepsilon\Omega^2)^{\omega}\ \text{при}\ \varepsilon\leqslant\frac{1}{2\Omega}.$$

Предложение 4 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ставская О.Н., Пятецкий-Шапиро И.И.* Об однородных сетях из спонтанно-активных элементов. — Проблемы кибернетики, 1968, № 20, с. 91—106.

2. *Васильев Н.Б., Петровская М.Б., Пятецкий-Шапиро И.И.* Моделирование голосования со случайной ошибкой. — Автоматика и телемеханика, 1969, № 10, с. 103—107.

3. *Шнирман М.Г.* К вопросу об эргодичности одной цепи Маркова

с бесконечным множеством состояний. — Проблемы кибернетики, 1968, № 20, с. 115—122.

4. *Тоом А.Л.* Об одном семействе сетей из формальных нейронов. — ДАН СССР, 1968, т. 183, № 1, с. 49—52.

5. *Тоом А.Л.* Устойчивые и притягивающие траектории в многокомпонентных системах. — В сб.: Многокомпонентные случайные системы. М., Наука, 1978, с. 288—308.

6. *Тоом А.Л.* Монотонные бинарные мозаичные автоматы. — Проблемы передачи информации, 1976, т. 12, вып. 1, с. 48—54.

7. *Митюшин Л.Г.* Неэргодичность однородных пороговых сетей при малом самовозбуждении. — Проблемы передачи информации, 1970, т. 6, вып. 3, с. 99—103.

* *
*