АКАДЕМИЯ НАУК СССР
НАУЧНЫЙ ЦЕНТР БИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В БИОЛОГИИ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Д-РА ФИЗ.-МАТ. НАУК ПРОФ. Р.Л.ДОБРУШИНА
КАНД. ФИЗ.-МАТ. НАУК В.И.КРЮКОВА
КАНД. ФИЗ.-МАТ. НАУК А.Л.ТООМА

ПУЩИНО · 1979

УДК 519.21:57

Сборник посвящен проблемам нового математического направления, недавно возникшего из задач статистической физики и моделирования нейронных сетей. Основная особенность рассматриваемых систем состоит в том, что они при некоторых значениях параметров обнаруживают поведение, напоминающее физическое явление типа фазового перехода. Связанные с этим математические задачи, их применение к некоторым биологическим объектам и процессам обсуждались на II Школе-семинаре по теме "Взаимодействующие марковские процессы с применениями в биологии", проходившей в мае 1978 г. в Пущине.

Сборник составлен из расширенных докладов и представляет интерес для математиков, биофизиков и инженеров, занимающихся моделированием сложных биологических процессов.

Ответственный за выпуск кандидат физико-математических наук В.И.КРЮКОВ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время бурно развивается новое научное направление, относящееся одновременно и к теоретической, и к прикладной математике, – это теория больших вероятностных систем с локально взаимодействующими компонентами. С точки зрения теории вероятностей, это специальный класс теории марковских процессов, хорошо приспособленный для описания коллективного поведения многих естественных процессов со взаимодействием. Каждый год приносит известия о том, что все новые разделы прикладных наук начинают использовать методы этого направления. Во многих разделах биологии на молекулярном, клеточном и популяционном уровнях, в ряде разделов современной физики, химии, кибернетики и других наук уже применяются методы теории многокомпонентных случайных систем.

Актуальность этих проблем подчеркивается тем большим интересом, который проявляется к ним в научных кругах всего мира. Например, на международных симпозиумах по теории информации, проводимых в СССР (V из них состоялся в июле 1979 г. в Тбилиси), теория многокомпонентных случайных систем является одной из основных тем. Общепризнан авторитет советских ученых в этой области.

Учитывая важность контактов между математиками и биологами, взаимного обогащения идеями и расширения биологически ориентированных математических исследований, оргкомитет (председатель Р.Л.Добрушин) решил регулярно проводить в Пущине школы-семинары по теории многокомпонентных случайных систем и ее применению в биологии. Их организует Научно-исследовательский вычислительный центр АН СССР совместно с Институтом проблем передачи информации АН СССР. I Школа-семинар состоялась в 1976 г. Ее труды были изданы в виде сборника "Взаимодействующие марковские процессы в биологии", Пущино, 1977, переведенного затем на английский язык и изданного в серии "Lecture Notes in Mathematics", 653, Springer-Verlag, 1978.

Настоящий сборник составлен на основе докладов, прочитанных на II Школе-семинаре, состоявшейся в 1978 г. При отборе материалов для сборника преследовались две цели: во-первых, дать представление заинтересованным читателям, в том числе биологам, о новейших методах и результатах в области математической теории многокомпонентных случайных систем. Поэтому в сборник включен ряд статей, не имеющих специальной биологической ориентации, но содержащих новые математические результаты в данной области; во-вторых, дать представление математикам о том, какие из актуальных биологических проблем требуют для своего решения применения методов многокомпонентных случайных систем.

По содержанию сборник разделен на две части. В первой части исследуются трансляционно инвариантные системы на целочисленных решетках. Пространственная однородность рассматриваемых систем накладывает характерный отпечаток на все работы первой части, объединяя их друг с другом.

Открывает сборник работа А.С.Комарова, демонстрирующая, как в важной биологической проблеме, имеющей большое народнохозяйственное значение, - проблеме описания растительных сообществ - применяются современные математические методы теории марковских полей. Интересен также обнаруженный автором факт неубывания напряженности конкуренции между деревьями, несмотря на естественное изреживание лесного массива.

В работе А.М.Леонтовича, Л.Г.Митюшина и М.Б.Петровской рассмотрено блуждание частиц, "склеивающихся" друг с другом. Получен ряд точных формул, описывающих поведение этих систем во времени.

В работе М.Г.Шнирмана получен ряд результатов о свойствах инвариантных мер (в частности, о неэргодичности) однородных сред, которые можно трактовать как бесконечные системы взаимодействующих вероятностных автоматов.

Случайные поля с непрерывными значениями изучаются в работе Ю.А.Терлецкого. В частности, доказывается единственность гиббсовского поля при некоторых условиях.

В работе Ф.Г.Абдулла-заде строятся инвариантные подпространства для трансфер-матрицы калибровочного поля Янга-Миллса.

В работе А.Л.Tooма вводится и исследуется новое понятие устойчивости конфигураций. В частности, доказывается, что в одномерных системах может быть не более одной устойчивой конфигурации, а в многомерных их может быть любое конечное число.

Во второй части помещены работы, где трансляционная инвариантность не предполагается.

В работе Б.С.Цирельсона развивается квантовая теория систем, близких к системам стохастических автоматов. Фактически эта работа открывает собой новое направление в квантовой механике, ориентированное на применение к большим системам с локальным взаимодействием.

Математические модели самосборки вирусов из отдельных макромолекул рассматриваются в работе М.Л.Тая. Выведен ряд новых точных формул.

Сборник оканчивается, как и начинается, статьей, посвященной статистическому анализу взаимодействия еще одной биологической популяции. В работе Г.Н.Борисюк с соавт. "экспериментально" обнаружена и при некоторых условиях доказана монотонная зависимость взаимной корреляции активности нейронов от параметра связи между ними.

Надеемся, что сборник окажется полезным всем, кто стремится внести вклад в теорию многокомпонентных случайных систем и ее приложения.

Р. Л.Добрушин
В.И.Крюков
А.Л.Тоом

УСТОЙЧИВОСТЬ В РЕШЕТЧАТЫХ СИСТЕМАХ С ЛОКАЛЬНЫМИ ЗАПРЕТАМИ

А.Л.Тоом

Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова

§ 1. Определения и примеры

Здесь рассматриваются целочисленные решетки $\mathbb{Z}^d$, каждой точке v которых соответствует конечное множество состояний $X_v = X_0$, одинаковое для всех точек решетки. Множество $X = \Pi X_v$ называется пространством конфигураций, понимаемых как бесконечные наборы $x = (x_v)$, состоящие из компонент $x_v \in X_v$, где $v \in \mathbb{Z}^d$. Аналогично определяется множество $X_V = \prod_{v \in V} X_v$ конфигураций x_V на любом множестве $V \subset \mathbb{Z}^d$.

Каждому множеству $A \subset X$ соответствует его характеристическая функция $\chi_A : X \longrightarrow \{0; 1\}$, равная 1 на конфигурациях, входящих в A, и только на них. Множество $V \subset \mathbb{Z}^d$ назовем носителем множества $A \subset X$, если $\chi_A(x)$ зависит только от x_V. Множество $A \subset X$ называем цилиндрическим, если оно имеет конечный носитель. Всякое цилиндрическое A имеет наименьший носитель – совокупность всех v таких, что χ_A существенно зависит от x_v.

Для любого $v \in \mathbb{Z}^d$ определяем отображение сдвига $T_v : X \longrightarrow X$, задаваемое условием:

$$\forall w \in \mathbb{Z}^d : (T_v(x))_w = x_{w-v} .$$

Всякий образ $T_v(A)$ будем называть транслятом A. Назовем конфигурацию периодической, если среди ее транслятов лишь конечное число различных.

Определение 1. Пусть задана размерность d и конечное множество X_0. Пусть задан также счетный ансамбль E цилиндрических подмножеств $X = X_0^{\mathbb{Z}^d}$, удовлетворяющий следующим трем условиям:

а) если множество C входит в E, то и все трансляты C тоже входят в E;

б) если объявить каждое множество эквивалентным всем его транслятам, то E разобьется лишь на конечное число классов эквивалентности;

в) все элементы E непусты и отличны от X.

Тогда скажем, что задана однородная решетчатая система (E, X) с локальными запретами, сокращенно называемая в дальнейшем системой. Конфигурацию $x \in X$ будем называть согласованной в системе (E, X), если x принадлежит пересечению всех элементов E.

Для любого множества $V \subset \mathbb{Z}^d$ мы также будем называть конфигурацию $y_V \in X_V$ согласованной в системе (E, X), если $\{x : x_V = y_V\}$ принадлежит пересечению всех тех элементов E, носители которых суть подмножества V.

Диаметром системы назовем наименьшее число D такое, что всякий элемент E имеет носителем куб с ребрами длины D, параллельными осям решетки $\mathbb{Z}^d$. В случае одномерной системы D – наименьшее, при котором носителем всякого элемента E служит отрезок $[v; v+D]$.

Замечание 1. Пусть дана система (E, X) диаметра D. Построим другую систему (E^0, X). Все элементы E суть трансляты одного множества C^0, носитель которого – куб V с ребрами длины D, из которых d ребер лежат на положительных полуосях решетки $\mathbb{Z}^d$. Множество C^0 – пересечение всех элементов E, имеющих носители, входящие в V. Легко убедиться, что множества согласованных конфигураций систем (E, X) и (E^0, X) равны.

Замечание 2. Все вышесказанное можно изложить на другом языке, который нам понадобится только в одномерном случае для систем (E^0, X), построенных в замечании 1. Назовем словом длины n в алфавите X_0 последовательность, имеющую n членов – элементов X_0. Каждой одномерной системе (E^0, X) диаметра D сопоставим конечный список запрещенных слов. Для этого выберем в E^0 элемент C^0 с носителем $[0; D]$ и занесем в наш список все те слова $x_0, \ldots, x_D$, для которых

$$\{y \in X : y_0 = x_0, \ldots, y_D = x_D\} \not\subset C^0.$$

Скажем, что конфигурация y содержит слово $x_1, \ldots, x_n$, если существует такое $v \in \mathbb{Z}$, что $y_{v+1} = x_1, \ldots, y_{v+n} = x_n$. Конфигурация будет согласованной, если она не содержит ни одного запрещенного слова.

Замечание 3. Легко указать алгоритм, позволяющий для любой одномерной системы определить, существует ли и единственна ли в ней согласованная конфигурация. Составим конечный ориентированный граф $\mathcal{g}$ с $|X_0|^D$ вершинами, соответствующими словам длины D в алфавите X_0. Из вершины $x_1,\dots,x_D$ проведем ребро в вершину $y_1,\dots,y_D$, если $x_2=y_1, x_3=y_2,\dots,x_D=y_{D-1}$, и к тому же слово $x_1,\dots,x_D,y_D$ незапрещенное. Если в графе $\mathcal{g}$ нет ориентированных циклов, то в системе нет согласованных конфигураций. Если в графе $\mathcal{g}$ есть ровно один ориентированный цикл, состоящий из одной вершины вида $a,a,\dots,a$, то в системе есть ровно одна согласованная конфигурация $\dots,a,a,a,\dots$. В остальных случаях в системе более одной согласованной конфигурации. Аналогичные вопросы в случае $d>1$ алгоритмически неразрешимы, см /1/.

Пусть дана система (E,X). Будем обозначать $\mathcal{M}$ совокупность вероятных мер на X, точнее на σ-алгебре, порожденной всеми цилиндрическими множествами. Для любого значения параметра $\varepsilon\in[0;1]$ определим подмножество $\mathcal{M}_\varepsilon\subset\mathcal{M}$. Мера μ входит в $\mathcal{M}_\varepsilon$, если для всякого натурального k и всяких k различных множеств $C_1,\dots,C_k$ – элементов E выполняется неравенство:

$$\mu(C_1\cup C_2\cup\dots\cup C_k)\geq 1-\varepsilon^k.$$

Для любой конфигурации x будем обозначать через $N(x)$ совокупность конфигураций, отличающихся от x лишь на конечном числе точек. Для любой точки v обозначаем:

$$N_v(x)=\{y\in N(x): y_v\neq x_v\}.$$

Определение 2. Согласованная конфигурация $x\in X$ называется устойчивой в системе (E,X), если

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\substack{\mu\in\mathcal{M}_\varepsilon\\ v\in\mathbb{Z}^d}}\mu(N_v(x))=0.$$

Замечание 4. Поскольку x согласована, то множество $\mathcal{M}_\varepsilon$ непусто уже потому, что оно содержит δ-меру, сосредоточенную в x. Поэтому супремум имеет смысл. Далее

$$\varepsilon_1<\varepsilon_2\Rightarrow\mathcal{M}_{\varepsilon_1}\subset\mathcal{M}_{\varepsilon_2},$$

поэтому супремум монотонно зависит от ε, откуда предел всегда существует.

Оставшаяся часть этого параграфа имеет целью объяснить, почему рассматриваются такие конструкции. Отправной точкой этой работы служил частный случай, который мы опишем в виде следующего примера.

Пример 1. Будем обозначать точки решетки $\mathbb{Z}^d$ через (s, t), где $s \in \mathbb{Z}^{d-1}$, $t \in \mathbb{Z}$. Введем множество:

$$U = \{(s,t) : |s| \leq R;\ -m \leq t \leq -1\},$$

где R, m – параметры. Выберем функцию $f: X_0^{|U|} \to X_0$ и составим ансамбль E из транслятов следующего множества:

$$\{x : x_{0,0} = f(x_U)\} .$$

Эту систему можно рассматривать как систему конечных автоматов, расположенных в точках $s \in \mathbb{Z}^{d-1}$ и работающих в дискретном времени $t \in \mathbb{Z}$. Конфигурация согласована, если состояние каждого автомата в каждый момент времени вычисляется как функция f от состояний его самого и его соседей в радиусе R от него в m предыдущих моментов времени. Мера $\mu \in \mathcal{M}_\varepsilon$ возникает здесь в том случае, если автоматы, вычисляя функцию $f(\cdot)$, при этом ошибаются вероятностным образом, причем их ошибки достаточно редки и не слишком зависимы друг от друга и от предыстории. Например, $\mu \in \mathcal{M}_\varepsilon$, если каждый автомат в каждый момент времени ошибается с вероятностью ε независимо от прочих ошибок. Устойчивость конфигурации x означает, что обусловленные малыми независимыми ошибками автоматов отклонения от x не накапливаются.

В работах /2, 3/ приведены теоремы, дающие достаточные условия устойчивости конфигураций в системах, описываемых в примере 1. Метод, которым они доказываются, есть вариант известного метода Пайерлса /4–6/. Настоящая работа – это попытка перенести метод работ /2, 3/ обратно в системы, где не выделяется ось времени. В качестве иллюстрации того, какие системы при этом попадают в поле зрения, приведем простой пример.

Пример 2. Пусть каждая точка решетки $\mathbb{Z}^2$ имеет два состояния 0 и 1. Ансамбль E состоит из всех транслятов следующих двух множеств:

$$\{x : x_{0,0} = x_{0,1}\}, \{x : x_{0,0} = x_{1,0}\}.$$

Очевидно, здесь есть ровно две согласованные конфигурации: "все нули" и "все единицы". Из предложений 5 и 6 следует, что эти конфигурации устойчивы. Эта система напоминает классическую модель Изинга.

К сожалению, в настоящее время наши предложения 5 и 6 не удается применить к гиббсовским распределениям, так как в случае $d>1$ не удается построить достаточно интересных мер, принадлежащих $\mathcal{M}_\varepsilon$. Единственный шаг в этом направлении представляет предложение 4, относящееся к случаю $d=1$, но именно к этому случаю предложения 5 и 6 неприменимы. Хотелось бы доказать аналог предложения 4 для всех размерностей.

§ 2. Формулировки

Первое предложение играет вспомогательную роль.

Предложение 1. Даны две системы (E, X) и (E', X). Пусть каждое $C \in E$ содержит в качестве подмножества пересечение конечного числа элементов E'. Пусть каждое $C' \in E'$ содержит в качестве подмножества пересечение конечного числа элементов E. Тогда системы (E, X) и (E', X) имеют равные множества согласованных конфигураций и равные множества устойчивых конфигураций.

Предложение 1 показывает, что, изучая любую систему (E, X), мы можем заменить ее на другую систему (E^0, X) с теми же согласованными и устойчивыми конфигурациями, в которой все элементы E^0 суть трансляты друг друга. Как строить систему (E^0, X), описано в замечании 1.

Следующее предложение вместе с замечанием 3 дает достаточно полное описание одномерных систем.

Предложение 2. В одномерной системе согласованная конфигурация устойчива, если и только если нет других согласованных конфигураций.

Следующее предложение образует контраст с предложением 2.

Предложение 3. Пусть задана размерность $d \geq 2$ и конечное множество X_0, содержащее не менее двух элементов. Пусть дан конечный набор конфигураций в пространстве $X = X_0^{\mathbb{Z}^d}$, удовлетворяющий следующему условию: если конфигурация входит в этот набор, то и все ее трансляты входят в этот набор. Тогда существует такая система (E, X), в которой все конфигурации из нашего набора устойчивы, а все прочие – несогласованы.

Основное в нашей работе предложение 6 утверждает устойчивость некоторых конфигураций. Очевидно, ценность утверждения о том, что конфигурация устойчива, зависит от богатства множеств $\mathcal{M}_\varepsilon$. При этом, чтобы получить возможно большее значение $\mu(N_v(x))$, выгодно брать меры μ, сосредоточенные на множестве $N(x)$. Следующее предложение 4 показывает, что в случае $d=1$ такие меры можно найти среди гиббсовских мер. К сожалению, приходится потребовать периодичность x.

Прежде чем сформулировать предложение 4, выполним некоторые построения. Пусть имеется одномерная система (E, X) диаметра D и в ней согласованная конфигурация y. Пусть заданы также отрезок $V \subset \mathbb{Z}$ и функция $q = X_0^{D+1} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, принимающая лишь строго положительные значения. Определим гиббсовскую меру μ на X, зависящую от y, V, $q(\cdot)$ как от параметров. Мера μ вне отрезка V сосредоточена в конфигурации $y_{\mathbb{Z}\setminus V}$. Значение $\mu(x_V)$ для любой конфигурации $x_V \in X_V$ равно коэффициенту Ξ^{-1} (где Ξ – сумма по всем x_V произведений, о которых говорится дальше в этой фразе), умноженному на произведение:

$$\prod q(x_v, x_{v+1}, \dots, x_{v+D}),$$

в котором v пробегает все те значения, при которых отрезок $[v; v+D]$ имеет хоть одну общую точку с V.

<u>Предложение 4.</u> Пусть дана одномерная система (E, X) с непустым множеством согласованных конфигураций. Для любого $\varepsilon > 0$ можно так подобрать функцию $q(\cdot)$, что для любой согласованной периодической конфигурации y и любого отрезка V гиббсовская мера μ, описанная в предыдущем абзаце, будет принадлежать множеству $\mathcal{M}_\varepsilon$.

Чтобы сформулировать следующие два предложения, придется ввести некоторые определения. Пусть дана d-мерная система (E, X) и в ней конфигурация y. Множество

$V \subset \mathbb{Z}^d$ назовем *гарантом* (для y), если для любой точки $v \in \mathbb{Z}^d$ существует такое конечное семейство $\{C_1, \dots, C_k\} \subset E$, что

$$\{x: x_v \neq y_v, x_{v+V} = y_{v+V}\} \cap C_1 \cap \dots \cap C_k = \emptyset .$$

Кроме того, погрузим $\mathbb{Z}^d$ в эвклидово пространство $\mathbb{R}^d$ с тем же началом координат 0. Точки $\mathbb{R}^d$ отождествляем с векторами. Векторы единичной длины называем *направлениями*. Множество направлений, то есть сферу радиуса 1 с центром 0 обозначаем Ω. Множество векторов, образующих отрицательные (неположительные) скалярные произведения с данным направлением ω, называем открытым (соответственно, замкнутым) *полупространством*, противоположным ω. Множество $V \subset \mathbb{R}^d$ называем гарантом, если $V \cap \mathbb{Z}^d$ есть гарант.

Предложение 5. Дана система (E, X) и в ней периодическая согласованная конфигурация y. Пусть имеется конечный набор направлений $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$, обладающий следующими двумя свойствами:

а) существуют такие положительные $p_0, p_1, \dots p_n$, что

$$p_0\omega_0 + p_1\omega_1 + \dots + p_n\omega_n = 0 ;$$

б) для любого m от 1 до n пересечение двух открытых полупространств, противоположных ω_m и ω_0, есть гарант для y.

Тогда y устойчива.

Следующее предложение относится к случаю $d = 2$. В этом случае $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^2$ – плоскость, Ω – окружность, полупространства – полуплоскости. Назовем направление ω *когарантным*, если противоположная ему открытая полуплоскость есть гарант.

Предложение 6. Если в двумерной системе (E, X) множество когарантных направлений для данной периодической согласованной конфигурации y содержит дугу, составляющую более половины окружности Ω, то y устойчива.

§ 3. Доказательства

Доказательство предложения 1

Равенство множеств согласованных конфигураций очевидно. Допустим, что конфигурация y устойчива в (E, X) и докажем, что она устойчива в (E', X). Для этого достаточно для любого $\varepsilon > 0$ найти такое $\delta > 0$, что $\mathcal{M}'_\delta \subset \mathcal{M}_\varepsilon$, где $\mathcal{M}'_\delta$ соответствует (E', X). Из соображений однородности мы можем выбрать такое k, что каждое $C \in E$ содержит в качестве подмножества пересечение не более чем k различных элементов E'. Поскольку все элементы E отличны от X, то мы можем выбрать такое ℓ, что каждое $C' \in E'$ служит подмножеством не более чем ℓ различным элементам E. Положим $\delta = (\varepsilon/k)^\ell$. Предположим, что $\mu \in \mathcal{M}'_\delta$ и докажем, что $\mu \in \mathcal{M}_\varepsilon$. Возьмем любые $C_1, \ldots C_m \in E$. Пользуясь выбором числа k, напишем:

$$C'_{1,1} \cap \ldots \cap C'_{1,k} \subset C_1,$$
$$\ldots$$
$$C'_{m,1} \cap \ldots \cap C'_{m,k} \subset C_m,$$

где все $C'_{1,1}, \ldots, C'_{m,k}$ суть элементы E'. Мы, возможно, добавили в каждое пересечение произвольные элементы E', чтобы в каждом пересечении стало ровно k членов. Очевидно,

$$\mu(C_1 \cup \ldots \cup C_m) \geq$$

$$\geq \mu[(C'_{1,1} \cap \ldots \cap C'_{1,k}) \cup \ldots \cup (C'_{m,1} \cap \ldots \cap C'_{m,k})] =$$

$$= \mu[(C'_{1,1} \cup \ldots \cup C'_{m,1}) \cap \ldots \cap (C'_{1,k} \cup \ldots \cup C'_{m,k})].$$

Здесь третья формула получена из второй переменой порядка пересечений и объединений. В ней k^m круглых скобок. Множества, стоящие в первой скобке, взяты из различных $C_1, \ldots, C_m$. Поэтому среди них не менее чем m/ℓ различных. Отсюда

$$\mu(C'_{1,1} \cup \ldots \cup C'_{m,1}) \geq 1 - \delta^{m/\ell}.$$

То же относится и ко всем круглым скобкам. Итак,

$$\mu(C_1 \cup \ldots \cup C_m) \geq 1 - K^m \cdot \delta^{m/\ell} = 1 - \varepsilon^m .$$

Доказательство предложения 2

Пользуясь предложением 1, будем считать, что все элементы E суть трансляты одного множества C^0, носителем которого служит отрезок $[0, D]$. На протяжении доказательства предложения 2 только этот отрезок $[0; D]$ называем носителем C^0, и только отрезок $[v; v+D]$ для любого v называем носителем множества $T_v(C^0)$.

I. Предположим, что в одномерной системе (E, X) есть (по меньшей мере) две различные согласованные конфигурации y и z, и докажем, что y неустойчива. Можно считать, что $y_0 \neq z_0$. Фактически мы для любого $\varepsilon > 0$ найдем такую меру $\mu \in \mathcal{M}_\varepsilon$, что $\mu(N_0(y)) = 1$. Будем строить меру μ в виде:

$$\mu = \frac{1}{n}(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n),$$

где $\delta_1, \ldots, \delta_n$ суть δ-меры, сосредоточенные в конфигурациях $y_1, \ldots y_n$, которые мы теперь построим. Выберем натуральное $n > \varepsilon^{-2D}$ и определим y_K для всех K от 1 до n следующим образом:

$$y_K(v) = \begin{cases} z(v), & \text{если } |v| \leq K(D+2); \\ y(v), & \text{если } |v| > K(D+2). \end{cases}$$

Мера μ определена. Очевидно, $\mu(N_0(y)) = 1$. Докажем, что $\mu \in \mathcal{M}_\varepsilon$. Обозначим через E_K совокупность тех элементов E, которые не содержат y_K. Заметим, что, если $C \in E_K$, то есть $y_K \notin C$, то носитель C либо содержит точки $K(D+2)$ и $K(D+2)+1$, либо содержит точки $-K(D+2)$ и $-[K(D+2)+1]$. Отсюда следует, что множества E_K не пересекаются друг с другом и что каждое из них содержит не более чем $2D$ элементов. Предположим теперь, что $C_1, \ldots, C_m$ – различные элементы E, и докажем, что

$$\mu(C_1 \cup \ldots \cup C_m) \geq 1 - \varepsilon^m .$$

Рассмотрим два случая:

а. Все $C_1, \ldots, C_m$ принадлежат одному E_K. В этом случае $\mu(C_1 \cup \ldots \cup C_m) = 1 - \frac{1}{n}$. С другой стороны, $\ell \leq 2D$, вследствие чего требуемое неравенство выполняется.

б. Не все $C_1, \ldots C_m$ принадлежат одному E_K. Тогда каждое E_K не содержит хоть одного из $C_1, \ldots, C_m$. В этом случае $\mu(C_1 \cup \ldots \cup C_m) = 1$.

II. Предположим, что в одномерной системе (E, X) есть ровно одна согласованная конфигурация y, и докажем, что y устойчива. Заметим, что все компоненты y одинаковы. Пусть $y = \ldots, a, a, a, \ldots$.

Назовем слово $z_1, \ldots z_n$ в алфавите X_0 согласованным, если конфигурация $z_{[1;n]} = (z_1, \ldots, z_n)$ согласована.

Лемма. Обозначим $M = |X_0|^D + D$. Во всяком согласованном слове все его буквы-члены, кроме, может быть M слева и M справа, равны a.

Доказательство. Допустим противное. Отбросив лишние буквы, получим согласованное слово

$$z_{-M}, \ldots, z_0, \ldots, z_M,$$

в котором $z_0 \neq a$. Очевидно, что в слове длины M в алфавите X_0 хоть одна комбинация из D идущих подряд букв повторяется дважды. Пусть $z_{K+1}, \ldots, z_{K+D}$ и $z_{\ell+1}, \ldots, z_{\ell+D}$, где $K < \ell$, — две одинаковые комбинации в последовательности $z_1, \ldots, z_M$. Выбросим из слова $z_{-M}, \ldots, z_0, \ldots, z_M$ буквы с номерами, большими чем $\ell + D$, и припишем к нему справа бесконечное количество периодов, каждый из которых совпадает с $z_{K+D+1}, \ldots, z_{\ell+D}$. Аналогично поступим с левой стороны. Мы получим бесконечную в обе стороны согласованную последовательность, а тем самым и конфигурацию, в которой есть компонента, отличная от a, что противоречит условию.

Теперь возьмем меру $\mu \in \mathcal{M}_\varepsilon$ и оценим сверху $\mu(N_0(y)) \leq \mu(\{x : x_0 \neq a\})$. Представим последнее выражение в виде:

$$\sum \mu(\{x : x_{[-M;M]} = (z_{-M}, \ldots, z_0, \ldots, z_M)\}),$$

где сумма берется по всем $(z_{-M}, \ldots, z_0, \ldots, z_M)$, в которых $z_0 \neq a$. По лемме все эти слова несогласованы, откуда каждое слагаемое не превышает ε. Итак,

$$\mu(\{x : x_0 \neq a\}) \leq |X_0|^{2M+1} \cdot \varepsilon,$$

что стремится к нулю вместе с ε.

Доказательство предложения 3

Пусть $y^1, \ldots, y^n$ – данный нам набор. Будем обозначать через (v, ρ) и называть шаром радиуса $\rho > 0$ с центром $v \in \mathbb{Z}^d$ множество

$$\{\omega \in \mathbb{Z}^d : |\omega - v| \leq \rho\}.$$

Определим ансамбль E как совокупность транслятов множества C_ρ, задаваемого условием: конфигурация y входит в C_ρ, если ограничение y на шар $(0, \rho)$ совпадает хоть с одним из ограничений $y^1, \ldots, y^n$ на этот шар. От ρ требуется лишь, чтобы оно было достаточно велико. Опишем, как подобрать ρ.

Назовем сдвиг T_v собственным для конфигурации y, если $y = T_v(y)$, и обозначим через $G(y)$ группу собственных сдвигов y. Обозначим $G = \bigcap_{i=1}^{n} G(y^i)$. Из условия нашего предложения следует, что фактор-группа $\mathbb{Z}^d / G(y^i)$ конечна при всех i от 1 до n, а потому и $\mathbb{Z}^d / G$ конечна. Выберем в каждом классе смежности $\mathbb{Z}^d / G$ по представителю $\omega_1, \ldots, \omega_m$. Кроме того, выберем в d-мерной группе G базис $u_1, \ldots, u_d$. Положим

$$\rho = max\{|\omega_1|, \ldots, |\omega_m|, |u_1|, \ldots, |u_d|\} + 1$$

и докажем предложение 3.

I. Пусть y согласована. Тогда $y_v = y_{v+u_j}$ для любой $v \in \mathbb{Z}^d$ и любого j от 1 до d. Отсюда $G \subset G(y)$. Пусть y совпадает с y^i на шаре $(0, \rho)$. Тогда y совпадает с y^i на точках $\omega_1, \ldots, \omega_m$. Отсюда и из $G \subset G(y)$ следует $y = y^i$.

II. Устойчивость $y^1, \ldots, y^n$ легко доказать контурным методом.

Доказательство предложения 4

Пользуясь предложением 1, мы будем считать, что все элементы E суть трансляты одного множества, имеющего носитель $[0; D]$ и определяемого списком запрещенных слов длины $D+1$.

I. Графы. Будем рассматривать конечные ориентированные графы, в которых для любых вершин a и b (в том числе для $a = b$) имеется не более чем одно ребро, идущее из a в b и обозначаемое $a \to b$, если оно существует. Путь длины m, ведущий из a_0 в a_m, - это последовательность вершин и ребер, которую можно записать так: $a_0 \to a_1 \to \ldots \to a_m$. Путь называется циклом, если его первая и последняя вершины совпадают, причем эти два вхождения считаются за одно.

Наш основной граф G имеет множество вершин X_0^D, совокупность слов длины D в алфавите X_0. Из вершины $(x_1, \ldots, x_D)$ идет ребро в $(y_1, \ldots, y_D)$, если $x_{k+1} = y_k$ при всех k от 1 до $D-1$. Каждому слову $(x_0, \ldots, x_D)$ мы взаимно-однозначно сопоставляем ребро графа G, ведущее из $(x_0, \ldots, x_{D-1})$ в $(x_1, \ldots, x_D)$. Ребро называем запрещенным, если ему сопоставлено запрещенное слово.

Бесконечным путем будем называть бесконечную в обе стороны последовательность $\ldots \to a_{v-1} \to a_v \to a_{v+1} \to \ldots$ Всякой конфигурации $x = (x_v)$ взаимно-однозначно соответствует бесконечный путь $\ldots \to (x_{v+1}, \ldots, x_{v+D}) \to \ldots$ в графе G. Конфигурация согласована, если соответствующий ей бесконечный путь содержит только незапрещенные ребра. Назовем циклическими все те вершины и ребра графа G, по которым может проходить бесконечный путь, соответствующей периодической согласованной конфигурации. Это эквивалентно тому, что вершина или ребро циклические, если по ним проходит хоть один цикл в графе G, содержащий только незапрещенные ребра. Объявим две циклические вершины эквивалентными, если обе они входят в цикл, содержащий только незапрещенные ребра, и полученные классы эквивалентности назовем бассейнами. Циклические ребра, соединяющие вершины одного бассейна, также назовем принадлежащими этому бассейну.

II. Выбор функции $q(\cdot)$. Функция $q(\cdot)$ должна быть определена на множестве X_0^{D+1}, или, что то же самое, на множестве ребер графа G. Будем подбирать функцию $q(\cdot)$ в виде следующего произведения:

$$q(x_0,\ldots,x_D)=p(x_0,\ldots,x_D)\cdot\tau^{\,r(x_0,\ldots,x_D)}.$$

Функции $p(\cdot)$ и $r(\cdot)$, которые мы выберем, зависят только от (E,X), причем $p(\cdot)$ принимает только положительные значения, а $r(\cdot)$ принимает только целые неотрицательные значения. Число $r(x_0,\ldots,x_D)$ будем называть степенью ребра $(x_0,\ldots,x_D)$. Степенью пути назовем сумму степеней его ребер, считаемых столько раз, сколько они входят в путь. Присвоим также каждой вершине a графа G ее степень $r(a)$, равную минимуму степеней всех путей, начинающихся в циклических вершинах и кончающихся в a. Параметр $\tau\geq 0$ зависит только от (E,X) и ε, положителен при $\varepsilon>0$ и стремится к нулю вместе с ε. Точную зависимость τ от ε укажем ниже.

Сопоставим нашей функции $q(\cdot)$ неотрицательную квадратную матрицу Q_τ, строки и столбцы которой нумеруются элементами X_0^D. Элемент матрицы Q_τ, стоящий на пересечении a-й строки и b-го столбца, равен значению $q(a\to b)$, если ребро $a\to b$ присутствует в графе G, и равен нулю в противном случае. Очевидно, Q_τ неразложима при $\tau>0$. Поэтому, по теореме Перрона, у матрицы Q_τ есть максимальное по модулю положительное собственное значение, которое обозначим λ_τ. Через v^τ обозначим соответствующий собственный вектор, нормированный так, что сумма его компонент равна единице.

Наложим теперь ряд условий на функции $p(\cdot)$ и $r(\cdot)$, а затем докажем, что можно выбрать $p(\cdot)$ и $r(\cdot)$ так, чтобы выполнить эти условия.

1. Функция $r(\cdot)$ равна нулю на всех циклических ребрах и целая положительная на всех прочих, нециклических, ребрах.

Отсюда следует, что при $\tau=0$ значения $q(\cdot)$ на всех нециклических ребрах равны нулю, и матрица $Q_0=Q_{\tau=0}$ разлагается на подматрицы, соответствующие бассейнам. Каждому бассейну B соответствует своя неразложимая неотрицательная матрица Q_B. Обозначим через

λ_B соответствующее максимальное собственное значение, а через v^B соответствующий собственный вектор, нормированный так, что сумма его компонент равна единице. Очевидно, придавая значениям функции $\rho(\cdot)$ на ребрах бассейна B всевозможные положительные значения, можно добиться, чтобы λ_B принимало любое наперед заданное положительное значение. Все, что требуется от значений $\rho(\cdot)$ на циклических ребрах – это чтобы числа λ_B были равны для всех бассейнов. От значений $\rho(\cdot)$ на нециклических ребрах требуется лишь, чтобы они были положительны. Не гонясь за общностью, наложим на функцию $\rho(\cdot)$ для простоты следующие два условия:

2. Значения $\rho(\cdot)$ на всех циклических ребрах положительны и таковы, что все λ_B равны единице.

3. Значения $\rho(\cdot)$ на всех нециклических ребрах равны единице.

Потребуем еще, чтобы для функции $\tau(\cdot)$ и натурального числа R были верны следующие утверждения:

4. Если первая и последняя вершины пути циклические, то степень этого пути либо равна нулю, либо не меньше R.

5. Составим граф γ, вершины которого взаимно однозначно соответствуют бассейнам и обозначаются так же. Из вершины B_1 в вершину B_2 графа γ проведем ребро, если в графе G существует путь степени R, ведущий из бассейна B_1 в бассейн B_2. Для любых вершин B_1 и B_2 в графе γ существует путь из B_1 в B_2.

Докажем, что функцию $\tau(\cdot)$ и число R можно выбрать так, что условия 4 и 5 будут выполнены. Для этого сначала докажем, что в графе G существует гамильтонов цикл, то есть цикл, содержащий все вершины G по одному разу. Из следствия теоремы 2 в гл. 10 в /7/ следует, что в G существует фактор, то есть такая система циклов, что через каждую вершину проходит ровно один цикл один раз. Допустив, что этих циклов больше одного, их количество легко уменьшить, найдя такие два цикла, которые можно соединить в один.

Выберем в G гамильтонов цикл и разрежем его на куски во всех циклических вершинах. Каждый кусок – путь, содержащий не меньше одного ребра, и в каждом куске только первая и последняя вершины – циклические. Если кусок содержит циклическое ребро, то он только из этого ребра и состоит. В противном случае все ребра куска нециклические, и мы припишем им такие целые положительные степени, чтобы их сумма – степень куска – равнялась R. Каждому нециклическому ребру, не входящему в наш гамильтонов цикл, припишем степень R. Итак, мы выбрали $\rho(\cdot)$, $\tau(\cdot)$ и R так, что все пять объявленных условий выполняются. Только этими условиями мы и будем пользоваться.

III. Оценки. В дальнейшем тексте доказательства приняты следующие две условности:

а) называются константами и обозначаются $const$ несколько различных положительных величин, зависящих только от системы (E, X), функций $\rho(\cdot)$ и $\tau(\cdot)$ и числа R;

б) предполагается, что τ положительно и меньше достаточно малой константы.

Лемма 1. $\lambda_\tau \le 1 + const \cdot \tau^R$.

Доказательство. Из формулы (40) в /8/ следует, что, если λ –максимальное по модулю положительное собственное значение неразложимой неотрицательной матрицы M и v – положительный вектор соответствующей размерности, то

$$\lambda \le \max_i \frac{(Mv)_i}{v_i} .$$

Чтобы применить эту формулу, изготовим положительный вектор v по следующему рецепту. Ограничение v_B вектора v на каждый бассейн B приравниваем собственному вектору v^B. Пусть теперь a – нециклическая вершина. Обозначим через $\Pi_{a,b}$ совокупность всех путей степени $\tau(a)$, кончающихся в a, начинающихся в циклической вершине b и содержащих только нециклические ребра. Обозначим через Π_a объединение $\Pi_{a,b}$ по всем циклическим b. Очевидно, Π_a всегда конечно и непусто. Будем писать $a < b$, если $\Pi_{a,b}$ непусто. Положим

$$v_a = (2\tau)^{\tau(a)} \cdot \sum_{b: a<b} v_b \cdot |\Pi_{a,b}| .$$

Вектор v определен. Сравним компоненты векторов v и $Q_\tau v$.

1. Если a – нециклическая, то $(Q_\tau v)_a < v_a$. Действительно $(Q_\tau v)_a$ есть многочлен от τ, в котором член с наинизшей степенью имеет степень $\tau(a)$ и равен $\sum v_h \cdot q(h \longrightarrow a)$, где h пробегает всевозможные предпоследние вершины в путях – элементах Π_a. Преобразуем это выражение, пользуясь тем, что $\tau(h) \leq \tau(a) - 1$:

$$\sum_h v_h \cdot q(h \longrightarrow a) = \tau^{\tau(a)} \cdot \sum_h 2^{\tau(h)} \cdot \sum_{b:h<b} v_b \cdot |\Pi_{h,b}| \leq$$

$$\leq \tau^{\tau(a)} \cdot \sum_h 2^{\tau(h)} \cdot \sum_{b:h<b} v_b \cdot |\Pi_{h,b}| \leq \tau^{\tau(a)} \cdot 2^{\tau(a)-1} \cdot$$

$$\cdot \sum_h \sum_{b:h<b} v_b \cdot |\Pi_{h,b}| \leq \frac{1}{2}(2\tau)^{\tau(a)} \sum_{b:a<b} v_b \cdot |\Pi_{a,b}| = \frac{1}{2} v_a .$$

Отсюда следует требуемое.

2. Легко доказать, что, если a – циклическая, то

$$(Q_\tau v)_a \leq v_a + const \cdot \tau^R .$$

Отсюда следует Лемма 1.

Лемма 2. Для всех вершин a

$$const \cdot \tau^{\tau(a)} \leq v_a^\tau \leq const \cdot \tau^{\tau(a)} .$$

Доказательство. 1. Верхняя оценка. Она очевидна, если a – циклическая. Пусть a – нециклическая. Рассмотрим неравенство:

$$v_a^\tau \geq (Q_\tau^{\tau(a)} v^\tau)_a ,$$

очевидное, поскольку $\lambda_\tau \geq 1$. Здесь правая часть равна сумме по всем путям длины $\tau(a)$, кончающимся в a, произведений значений $q(\cdot)$ от ребер пути, умноженных на v_b^τ, где b – начало пути. Степень каждого из этих путей не меньше $\tau(a)$. Итак, v_a^τ оценивается сверху многочленом от τ, в котором член с наинизшей степенью имеет степень $\tau(a)$, откуда следует верхняя оценка.

2. Нижняя оценка. Ограничимся сначала циклическими вершинами. В этом случае достаточно доказать, что

$$v_a^\tau \geq const \cdot v_b^\tau$$

для всех циклических вершин a и всех вершин b. Это неравенство очевидно в том случае, если a и b входят в один бассейн. Докажем его в том случае, если a и b

входят в различные бассейны. Благодаря тому что наша функция $\tau(\cdot)$ удовлетворяет условию 5, это вытекает из следующего утверждения. Пусть существует путь степени R из бассейна B в бассейн A. Тогда существуют такие вершины $b\in B$, $a\in A$, что $v_a^\tau \geq const\cdot v_b^\tau$. Докажем это. Обозначим $N=|X_0|^D-1$. Применим матрицу Q_0^N к вектору v^τ. При этом в бассейне A компоненты вектора $(v^\tau)_A$ подвергнутся действию матрицы Q_A^N. По формуле в начале доказательства леммы 1 и благодаря тому, что $\lambda_A=1$, хоть одна компонента при этом не уменьшится. Пусть это a-я компонента. Итак,

$$(Q_0^N v^\tau)_a \geq v_a^\tau .$$

Вычтем это неравенство из следующего равенства:

$$(Q_\tau^N v^\tau)_a = \lambda_\tau^N v_a^\tau .$$

Разность левых частей составляет тот добавок, который получает a-я компонента благодаря отличию τ от нуля. Мы выбрали N настолько большим, что существует путь длины N степени R, кончающийся в a и начинающийся в некоторой вершине $b\in B$. Тогда

$$(Q_\tau^N v^\tau)_a-(Q_0^N v^\tau)_a \geq p_0^N\cdot\tau^R\cdot v_b^\tau ,$$

где $p_0=\min\{1;\min p(\cdot)\}$. Отсюда

$$v_a^\tau(\lambda_\tau^N-1)\geq p_0^N\cdot\tau^R\cdot v_b^\tau .$$

Отсюда и из леммы 1 следует объявленное утверждение.

Теперь, опираясь на верхнюю оценку для нециклических вершин, легко доказать неравенство $v_a^\tau \geq const\cdot v_b^\tau$ и для того случая, когда a циклическая, а b нециклическая. Затем, доказав нижнюю оценку для циклических вершин, легко доказать ее и для нециклических.

Лемма 3. $const\cdot\lambda_\tau^{|V|}\leq \Xi \leq const\cdot\lambda_\tau^{|V|}$.

Доказательство. Верхняя оценка очевидна. Докажем нижнюю. Если $|V|\leq const\cdot(\tau^R)^{-1}$, то и она очевидна, так как в этом случае по лемме 1 $\lambda_\tau^{|V|}\leq const$, тогда как величина Ξ всегда не меньше, чем ее слагаемое, отвечающее конфигурации y и равное единице.

Пусть $V = [0; N]$. Тогда величина Ξ равна компоненте с номером $(y_{N+1}, \dots, y_{N+D})$ вектора $Q_\tau^{N+D+1} v$, где вектор v имеет равную единице компоненту с номером $(y_{-D}, \dots, y_{-1})$, а все прочие компоненты равные нулю. Пользуясь этим, рассмотрим случай, когда $N \geq N_0 \cdot (\tau^R)^{-1}$, где N_0 константа, значение которой подберем в ходе доказательства. В этом случае нижняя оценка сводится к следующему:

Пусть вектор v имеет одну компоненту $v_a = 1$, где вершина a циклическая, а все прочие компоненты равные нулю. Тогда существует такая константа N_0, что при $N = [N_0 \cdot (\tau^R)^{-1}]$ имеет место неравенство:

$$Q_\tau^N v \geq const \cdot v^\tau .$$

Докажем это последнее утверждение. Пусть $|A|$ число вершин в бассейне A, содержащем a. Тогда

$$(Q_\tau^{|A|} v)_A \geq const \cdot v .$$

Пусть существует путь длины ℓ степени R, ведущий из бассейна A в вершину b другого бассейна B. Тогда

$$(Q^{|A|+\ell} v)_b \geq const \cdot \tau^R ,$$

откуда

$$(Q^{|A|+\ell+|B|} v)_B \geq const \cdot \tau^R \cdot v^B .$$

Индукцией по натуральному k можно доказать, что

$$(Q^{k(|A|+\ell+|B|)} v)_B \geq const \cdot k \cdot \tau^R \cdot v^B .$$

Полагая $k = [(\tau^R)^{-1}]$, получаем $(Q^N v)_B \geq const \cdot v^B$ при $N \geq const \cdot (\tau^R)^{-1}$. Потратив еще $const \cdot (\tau^R)^{-1}$ шагов, мы получим ограниченные снизу константой компоненты в третьем бассейне, куда ведет путь степени R из B и т.д. Благодаря условию 5, так мы попадем во все бассейны. Следовательно, при достаточно большом $C = const$ мы за $C \cdot (\tau^R)^{-1}$ шагов получим вектор, все циклические компоненты которого не меньше константы. Потратив еще константу шагов, мы получим значение каждой нециклической компоненты a не меньше чем

$const \cdot \tau^{\tau(a)}$, а по лемме 2 это и требовалось.

Теперь докажем предложение 4. Выберем из суммы, составляющей Ξ , слагаемые, соответствующие тем конфигурациям x_V, в которых на K фиксированных отрезках длины $D+1$ стоят запрещенные слова. Легко оценить, что сумма этих слагаемых не превышает

$$(const \cdot \tau)^K \cdot \lambda_\tau^{|V|} .$$

Разделив это выражение на оценку для Ξ, даваемую леммой 3, получаем требуемую оценку при τ, равном ε, умноженному на достаточно малую константу.

Доказательство предложения 5 аналогично доказательству теоремы 1 в /3/. Поэтому его можно здесь не приводить.

Доказательство предложения 6

Первые пять лемм не опираются на условия предложения 6.

Лемма 1. Множество, содержащее гарант, тоже есть гарант.

Лемма 2. Всякий гарант содержит конечный гарант.

Лемма 3. Пусть каждому элементу a подмножества A' гаранта A как-то сопоставлен гарант B_a. Тогда множество

$$(A \setminus A') \cup \bigcup_{a \in A'} (a + B_a)$$

также есть гарант.

Доказательства первых трех лемм очевидны.

Будем называть углом непустое пересечение двух различных замкнутых полуплоскостей, из которого выброшена точка 0. Будем называть τ-сечением угла α всякое его ограниченное подмножество $\sigma \subset \alpha$, удовлетворяющее следующему условию: если в последовательности точек $v_0, v_1, v_2, \ldots$ точка $v_0 = 0$, все остальные точки принадлежат $\alpha \setminus \sigma$ и $|v_{i+1} - v_i| \le \tau$ при всех i, то последовательность v_i ограничена.

Лемма 4. Для любого угла α, являющегося гарантом, существует такое число $\tau(\alpha) > 0$, что любое $\tau(\alpha)$-сечение угла α также есть гарант.

Доказательство. Пусть угол α есть гарант. По лемме 2 существует конечный гарант $A \subset \alpha$. Приравняем $r(\alpha)$ к максимуму расстояний точек A от точки 0. Пусть σ есть $r(\alpha)$-сечение угла α. Докажем, что σ есть гарант. Обозначим через ρ множество точек, могущих входить в последовательности $v_0, v_1, v_2, \dots$, в которых $v_0 = 0$, все остальные члены принадлежат $\alpha \setminus \sigma$ и $|v_{i+1} - v_i| \le r(\alpha)$ при всех i. По сказанному выше, ρ ограничено, а потому конечна совокупность тех элементов E, носители которых пересекают ρ. Предположим, что конфигурация x принадлежит всем этим элементам E, а также что $x_0 \ne y_0$, и найдем такую точку $v \in \sigma$, в которой $x_v \ne y_v$.

Будем индуктивно строить точки v_n, пока не построим точку, которую примем за v. Полагаем $v_0 = 0$. Пусть построена точка $v_n \in \rho$, в которой $x_{v_n} \ne y_{v_n}$. Поскольку множество A есть гарант и поскольку x принадлежит всем элементам E, носители которых пересекают ρ, то найдется точка $a \in v_n + A$ такая, что $x_a \ne y_a$. Если $a \in \rho$, то полагаем $v_{n+1} = a$. Если же a не принадлежит ρ, то построение прекращаем и принимаем a за v. Очевидно, в последнем случае $a = v \in \sigma$, что и требовалось. Построение должно когда-то закончиться по определению сечения.

Лемма 5. Пусть углы α и β суть гаранты и подмножества некоторого третьего угла, причем $\alpha \cap \beta$ непусто. Тогда всякий угол γ, содержащий пересечение $\alpha \cap \beta$ и неравный ему, есть гарант.

Доказательство. Поскольку множество $\gamma \setminus (\alpha \cap \beta)$ непусто, то оно пересекается с α или с β; пусть оно пересекается с α. Обозначим через σ пересечение угла α с кольцом с центром 0, внешний радиус которого равен $R + r(\alpha)$, а внутренний радиус равен R, где R будет выбрано достаточно большим. По лемме 4, σ есть гарант. Сопоставим каждой точке $v \in \sigma \setminus \delta$ множество B_v по следующему правилу: B_v есть пересечение угла β с множеством $\delta - v$ и с кругом с центром 0 и достаточно большим радиусом ρ. Легко убедиться, что можно выбрать такое большое R, а после этого такое большое ρ, что множество B_v будет $r(\beta)$-сечением угла β, и потому по лемме 4 будет гарантом. Поэтому по лемме 3 множество

$$(\sigma \cap \delta) \cup \bigcup_{v \in \sigma \setminus \delta} (v + B_v)$$

будет гарантом, а потому и содержащий его угол δ также будет гарантом.

Будем называть открытую дугу $\alpha \subset \Omega$ когарантной, если пересечение всех открытых полуплоскостей, противоположных всем точкам α, есть гарант. Утверждение леммы 5 можно эквивалентным образом переформулировать так.

Лемма 5^{I}. Если две когарантные дуги пересекаются и их объединение составляет не более половины окружности, то когарантна и всякая открытая дуга, содержащаяся в их объединении и неравная ему.

С настоящего момента будем предполагать, что выполнены условия предложения 6. Следующую лемму сформулируем сразу в двух эквивалентных друг другу вариантах.

Лемма 6. Существуют два угла α и β, являющиеся гарантами и служащие подмножествами третьего угла, причем пересечение α и β пусто.

Лемма 6^{I}. Существуют две когарантные дуги, объединение которых есть дуга, составляющая более половины окружности Ω.

Достаточно доказать лемму 6^{I}. По лемме 2, всякое когарантное направление принадлежит хоть одной когарантной дуге, откуда объединение всех когарантных друг содержит замкнутую полуокружность. Отсюда, по известной лемме о конечном покрытии, существует конечная совокупность когарантных дуг, объединение которых содержит замкнутую полуокружность. Если этих дуг две, то все доказано. Пусть число этих дуг равно $M > 2$. Будем теперь доказывать индукцией по параметру m, уменьшающемуся от M до 2, следующее утверждение: "существуют m когарантных дуг, объединение которых есть дуга, составляющая более половины окружности Ω". Базой индукции при $m = M$ служит утверждение, доказанное выше, а индукционный шаг сводится к лемме 5^{I}.

Добавим еще одну эквивалентную переформулировку лемм 6 и 6^{I}:

Лемма 6^{II}. На нашей плоскости $\mathbb{R}^2$ существуют такие косоугольные координаты s, t с началом 0 и такие конечные гаранты A и B, что $s < 0$, $t > 0$ во всех точках A и $s>0$, $t>0$ во всех точках B.

Лемма 6^{II} – единственное, ради чего доказывались предыдущие леммы. С настоящего момента мы фиксируем координаты s и t и множества A и B, для которых выполняется лемма 6^{II}. Величины, которые при этом определены однозначно, будем называть константами.

Сопоставим всякой точке $v \in \mathbb{Z}^2$ следующее множество:

$$D_v = \{x \in X : x_v \neq y_v \text{ и } (x_{v+A} = y_{v+A} \text{ или } x_{v+B} = y_{v+B})\} .$$

Всякому конечному множеству $V \in \mathbb{Z}^2$ сопоставим множество D_V – пересечение множеств D_v по всем $v \in V$. Следующая лемма и только она использует периодичность конфигурации y.

Лемма 7. Существует такой конечный набор $\{C_1,\dots,C_m\} \subset E$, что для любой точки $v \in \mathbb{Z}^2$ следующее пересечение пусто:

$$D_v \cap T_v(C_1) \cap \dots \cap T_v(C_m) = \emptyset .$$

Доказательство легко выводится из того, что A и B гаранты.

Наряду с данной нам системой (E,X) построим систему (E',X). Ансамбль E' получается добавлением к ансамблю E множества $C' = C_1 \cap \dots \cap C_m$ и всех его транслятов, где множества $C_1, \dots, C_m$ – те, о которых говорится в лемме 7. По предложению 1, системы (E,X) и (E',X) имеют равные множества устойчивых конфигураций, и поэтому нам достаточно доказать устойчивость y в системе (E',X). Система (E',X) удобна тем, что, если $\mu \in \mathcal{M}_\varepsilon$, то $\mu(D_V) \leq \varepsilon^{|V|}$ для любого конечного $V \subset \mathbb{Z}^2$.

Мы докажем предложение 6 аналогично тому, как в /9/ была доказана неэргодичность задачи Ставской, причем наша ось s аналогична линии, на которой располагаются автоматы, наша ось t – оси времени с противоположным знаком, наша конфигурация y – состоянию "все автоматы все время нули", а отношение $x \in D_v$ аналогично отношению "в точке v происходит самовозбуждение в реализации x". Чтобы оценить сверху меру множества

$N_0(y)$, мы покроем его счетной системой множеств D_V при некоторых V специального вида, которые сейчас построим.

Будем называть ломаными конечные последовательности $P=(P_1,\dots,P_n)$, члены которых будем называть вершинами. Каждая вершина имеет вид $P_k=(v_k;\pi_k)$, где $v_k\in \mathbb{Z}^2$, $\pi_k\in\{0;1\}$. Будем говорить, что k-ая вершина $P_k=(v_k;\pi_k)$ расположена в точке v_k и имеет метку π_k. Назовем вершину $P_k=(v_k;\pi_k)$ меченой, если $\pi_k=1$. Обозначим через $M(P)$ множество точек, где расположены меченые вершины P. Будем называть вектор-разность $v_{k+1}-v_k$ k-м ребром нашей ломаной, $1\le k\le n-1$.

Будем называть ломаную $P=(P_1,\dots,P_n)$ допустимой, если она удовлетворяет следующим пяти условиям:

1. Первая и последняя вершины расположены в точке 0.
2. В ломаной есть хоть одна меченая вершина.
3. Все меченые вершины ломаной расположены в различных точках.
4. Каждое ребро $v_{k+1}-v_k$, где $1\le k\le n-1$, принадлежит множеству $A\cup(B-A)\cup(-B)$.

Прежде чем сформулировать условие 5, заметим, что множества A, $B-A$ и $-B$ не пересекаются друг с другом. Пользуясь этим, сопоставим каждому ребру $v_{k+1}-v_k$ допустимой ломаной его тип d_k, определяемый следующим образом:

$$d_k=\begin{cases}1, & \text{если } v_{k+1}-v_k\in A;\\ 2, & \text{если } v_{k+1}-v_k\in B-A;\\ 3, & \text{если } v_{k+1}-v_k\in -B.\end{cases}$$

Теперь приведем последнее условие допустимой ломаной:

5. Если $(d_{k-1}=3$ и $d_k=1)$ или $(d_{k-1}\ne 3$ и $d_k\ne 1)$, то вершина P_k меченая.

Лемма 8. Множество $N_0(y)$ покрывается множествами $D_{M(P)}$, где P пробегает все допустимые ломаные.

Доказательство. Возьмем произвольную конфигурацию $x\in N_0(y)$ и построим для нее допустимую ломаную $P(x)$ такую, что $x\in D_{M(P(x))}$. Для удобства сопоставим каждой ломаной P множество точек:

$$\delta(P)=\{v\in M(P): x\notin D_v\}.$$

Очевидно, $x \in D_{M(P)}$ если и только если $\delta(P)$ пусто.

Будем строить последовательность ломаных $P_0(x)$, $P_1(x), \ldots$. Каждый раз, построив очередную ломаную $P_\kappa(x)$ доказываем, что $P_\kappa(x)$ допустима и что вершины $P_\kappa(x)$ располагаются лишь в тех точках v, где $x_v \neq y_v$. Затем, опираясь на это, перестраиваем $P_\kappa(x)$ в следующую ломаную $P_{\kappa+1}(x)$. После конечного числа таких шагов получаем ломаную, которую принимаем за $P(x)$. Мы опускаем доказательства, так как они очевидны, и несущественные детали в построении.

Сначала опишем одну вспомогательную операцию, которую назовем "выбрасыванием петли". Допустим, что ломаная $P=(P_1,\ldots,P_n)$ не удовлетворяет условию 3 допустимой ломаной. Выберем какие-нибудь номера κ и ℓ, где $1 \leq \kappa < \ell \leq n$, такие, что $v_\kappa = v_\ell$, $\pi_\kappa = \pi_\ell = 1$. Выбросим из нашей ломаной члены с номерами i, где $\kappa < i \leq \ell$, то есть сформируем ломаную $P' = (P_1', \ldots, P'_{n+\kappa-\ell})$, в которой

$$P_j' = \begin{cases} P_j, & \text{если } j \leq \kappa; \\ P_{j+\ell-\kappa}, & \text{если } j > \kappa. \end{cases}$$

Очевидно, отправляясь от ломаной, удовлетворяющей условиям 1, 2, 4, 5 допустимой ломаной, мы, применив достаточное число раз "выбрасывание петли", получим допустимую ломаную.

Теперь опишем индукционное построение. На первом шаге берем ломаную $P_0(x)$, состоящую из одной меченой вершины, расположенной в точке O.

Пусть мы имеем ломаную $P_\kappa(x) = (P_1, \ldots, P_n)$. Если $x \in D_{M(P_\kappa(x))}$, то построение прекращается и $P_\kappa(x)$ принимается за $P(x)$. Допустим, что $x \notin D_{M(P_\kappa(x))}$, то есть $\delta(P_\kappa(x))$ непусто. Выберем любую из точек-элементов $\delta(P_\kappa(x))$. Пусть меченая вершина, лежащая в этой точке, есть $P_i = (v_i, \pi_i)$. По индукционному предположению $x_{v_i} \neq y_{v_i}$. Тогда $x_{v_i+A} \neq y_{v_i+A}$ и $x_{v_i+B} \neq y_{v_i+B}$, то есть существуют точки $w_A \in v_i + A$ и $w_B \in v_i + B$ такие, что $x_{w_A} \neq y_{w_A}$ и $x_{w_B} \neq y_{w_B}$. Сформируем последовательность $P' = (P_1', \ldots, P_{n+3}')$ по следующему правилу:

$$P'_j = \begin{cases} P_j, & \text{если } j < i; \\ (v_i; 0), & \text{если } j = i; \\ (\omega_A; 1), & \text{если } j = i+1; \\ (\omega_B; 1), & \text{если } j = i+2; \\ (v_i; 0), & \text{если } j = i+3; \\ P_{j-3}, & \text{если } j > i+3. \end{cases}$$

Очевидно, ломаная P' удовлетворяет условиям 1, 2, 4, 5 допустимой ломаной. Применив к ней достаточное число раз "выбрасывание петли", получим допустимую ломаную, которую примем за $P_{k+1}(x)$.

Докажем, что индуктивный процесс перестройки ломаных непременно закончится, то есть множество $\delta(P_k(x))$ на каком-то шаге станет пусто. Сопоставим каждой ломаной $P = P_k(x)$ следующий параметр:

$$\sum(P) = \sum_{\substack{v_i \in \delta(P) \\ 1 \le i \le n}} 3^{-t(v_i)} .$$

На каждом шаге построения этот параметр строго уменьшается. С другой стороны, он может принимать лишь конечное число различных значений, так как все меченые вершины ломаных $P_k(x)$ расположены в различных элементах конечного множества $\{v : x_v \ne y_v\}$.

Итак, $\mu(N_0(y)) \le \sum \mu(D_{M(P)})$, где сумма берется по всем допустимым ломаным P. Остается оценить эту сумму. Обозначим через $|P|$ количество членов ломаной P ($|P| = n$, если $P = (P_1, \dots, P_n)$).

Лемма 9. Существует такая константа $F > 0$, что $|M(P)| \ge F|P|$ для любой допустимой ломаной P.

Доказательство. Из леммы 6[II] вытекает, что $s < 0$ во всех точках $A \cup (-B)$. Обозначим через $\tau > 0$ минимум модуля s во всех точках $A \cup (-B)$. Обозначим через $R > 0$ максимум S во всех точках $B - A$. Положим $F = \tau/3(R+\tau)$. Поскольку начало и конец ломаной совпадают, количество ребер типа 2 не меньше, чем $(|P|-1)\cdot\tau/R+\tau)$. Далее легко убедиться, что между каждыми двумя ребрами типа 2 в ломаной имеется хоть одна меченая вершина. Поэтому число меченых вершин не меньше $[(|P|-1)\tau/(R+\tau)] - 1$. Это выражение не меньше $F|P|$ при $|P| \ge 3(R+\tau)/\tau$.

Если же $|P| < 3(R+r)/r$, то, поскольку по условию 2 в ломаной есть хоть одна меченая вершина, число меченых вершин и в этом случае не меньше $F|P|$.

Теперь, опираясь на лемму 9, оценим сверху сумму мер $\mu(D_{M(P)})$ по всем допустимым P, если $\mu \in \mathcal{M}_\varepsilon$. Заметим, что число допустимых ломаных, имеющих n вершин, не превышает H^n, где H константа. Поэтому

$$\sum \mu(D_{M(P)}) \leqslant \sum \varepsilon^{|M(P)|} \leqslant$$

$$\leqslant \sum \varepsilon^{F \cdot |P|} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} H^n \cdot \varepsilon^{Fn},$$

где первые три суммы берутся по всем допустимым P.

Этот ряд при достаточно малых $\varepsilon > 0$ сходится и его сумма стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Отсюда и из леммы 8 следует верхняя оценка $\mu(N_0(y))$, обеспечивающая устойчивость y.

ЛИТЕРАТУРА

1. Berger R. The Undecidability of the Domino Problem. Memoirs. - Amer.Math.,Soc.,1966,No 66.
2. Тоом А.Л. Неэргодичные многомерные системы автоматов. – Проблемы передачи информации, 1974, т. 10, вып. 3, с. 70–79.
3. Тоом А.Л. Устойчивые и притягивающие траектории в многокомпонентных системах. – В сб.: Многокомпонентные случайные системы. М., Наука, 1978, с. 288–308.
4. Peierls R.E. On Ising's Model of Ferromagnetism. - Proc. Camb. Phil. Soc, 1936, v. 32, part 3, p. 477-481.
5. Griffiths R.B. Peierls' Proof of Spontaneous Magnetization in a Two-Dimensional Ising Ferromagnet. - Phys. Rew., 1964, v. 136, No 2A, p. 437-439.
6. Добрушин Р.Л. Существование фазового перехода в двумерной и трехмерной моделях Изинга. – Теория вероятностей и ее применения, 1965, т. 10, вып. 2, с. 209–230.
7. Берж К. Теория графов и ее применения. М., ИЛ, 1962.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., Наука, 1964.
9. Тоом А.Л. Об одном семействе однородных сетей из формальных нейронов. – Докл. АН СССР, 1968, т. 183, № 1, с. 49–52.