НЕЭРГОДИЧНОСТЬ В ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ

ТООМ А.Л.

Одинаковые стохастические автоматы с двумя состояниями соединены в бесконечную цепочку. Состояние каждого автомата вероятностным образом зависит от состояний его соседей в предыдущий момент времени. При определенных ограничениях доказывается, что марковская цепь, описывающая поведение такой системы, имеет не менее двух различных инвариантных вероятностных распределений.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ. Бесконечная система автоматов x_i, где i пробегает все целые числа, работает в дискретном времени $t=0,1,2,\ldots$. Состояние x_i в момент t, назовем его x_i^t, равно 0 или 1. Оно вероятностным образом определяется состояниями в момент $t-1$ автоматов x_j, $i-2\le j\le i+2$, а именно, если $x_{i-2}^{t-1}=a_{-2},\ldots,x_{i+2}^{t-1}=a_2$, то $x_i^t=b$ с вероятностью $\varphi^b(a_{-2},\ldots,a_2)$, $\varphi^0+\varphi^1\equiv 1$. При этом, если значения x_j^{t-1} при всех j заданы, то все x_i^t независимы. Изучение таких систем - однородных случайных сред было начато в работе И.И.Пятецкого-Шапиро и О.Н.Ставской / I / и затем продолжено в ряде работ (например, / 4,5 /).

Работа такой среды описывается марковской цепью с континуальным множеством состояний $X=\{x\}$, $x=\ldots,x_{-1},x_0,x_1,\ldots$, $x_i\in\{0,1\}$. Вероятностная мера μ на X определяется её значениями на элементах σ-алгебры, порожденной цилиндрическими подмножествами, удовлетворяющими условиям согласования / 2 /.

Мера называется однородной, если она переходит в себя при сдвиге $i\to i+1$. Все операторы, вводимые ниже, переводят однородные меры в однородные. Однородная мера μ задается величинами.

$$\mu(a_0,\ldots,a_n) \equiv \mu(x_i = a_0,\ldots, x_{i+n} = a_n) \qquad (1)$$

Мера $\mu^{(t)}$ в момент t определяется как $\mu^{(t)} = \mu^{(t-1)} V_\varphi$, где V_φ – линейный оператор. Обозначим δ_x меру, сосредоточенную на последовательности x. Будем определять линейные операторы, задавая результаты их применения ко всем δ_x. По сказанному выше, $\delta_y V_\varphi$ – мера, в которой величины x_i независимы и равны $a \in \{0,1\}$ с вероятностями $\varphi^a(y_{i-r},\ldots,y_{i+r})$.

Мера μ называется инвариантной, если $\mu = \mu V_\varphi$. Среда называется эргодичной, если у неё есть только одна инвариантная мера, а иначе – неэргодичной. Основной результат работы состоит в доказательстве неэргодичности определенного класса однородных случайных сред. Опишем этот класс. Пусть

$$\varphi^1(1,\ldots,1) = 1. \qquad (2)$$

Тогда мера δ_1, сосредоточенная на последовательности, "все единицы", инвариантна. Фактически будет доказываться для некоторого s неравенство

$$\delta_0 (V_\varphi)^t (\underbrace{1,\ldots,1}_{s+1}) \leq C < 1, \quad t = 1,2,\ldots, \qquad (3)$$

где δ_0 – мера, сосредоточенная на последовательности "все нули". По теореме о неподвижной точке / 3 / из (3) следует существование инвариантной меры $\tilde\mu$, для которой $\tilde\mu(\underbrace{1,\ldots,1}_{s+1}) \leq C$, и поэтому $\tilde\mu \neq \delta_1$. Пусть автоматы x_i спонтанно-активны. Это значит, что функции φ^0, φ^1 имеют вид:

$$\varphi^0 = (1-\theta)\psi^0, \quad \varphi^1 = \theta + (1-\theta)\psi^1, \quad 0 \leq \theta < 1, \qquad (4)$$
$$\psi^0 + \psi^1 \equiv 1, \quad \psi^i \geq 0, \quad i = 0,1.$$

Тогда $V_\varphi = V_\psi S_\theta$, где S_θ – оператор, действие которого заключается лишь в независимой замене всех нулей на единицы с вероятностью θ. Пусть

$$\psi^0(0,\dots,0)=\psi^1(1,\dots,1)=1 \qquad (5)$$

Наряду с φ^a и ψ^a введем еще χ^a, где функция χ^1 определяется равенством:

$$\chi^1(a_{-r},\dots,a_r)=\begin{cases}\left[\psi^1(a_{-r},\dots,a_r)\right]^{\frac{1}{2}}, & \text{если } a_{-r}=a_r=0;\\ \psi^1(a_{-r},\dots,a_r) & \text{иначе,}\end{cases}$$

а $\chi^0\equiv 1-\chi^1$. Обозначим:

$$\left.\begin{aligned}\min_{a_1,\dots,a_k}\prod_{i=0}^{k}\chi^0(\underbrace{0,\dots,0}_{2r-i},1,a_1,\dots,a_i)&=s^{л}_{k+1},\\ \min_{a_1,\dots,a_k}\prod_{i=0}^{k}\chi^0(a_i,\dots,a_1,1,\underbrace{0,\dots,0}_{2r-i})&=s^{п}_{k+1},\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

где $a_1,\dots,a_k\in\{0,1\}$, $k=0,\dots,2r-1$ (л–левые, п–правые), и затем:

$$d^j_k=\begin{cases}1-s^j_1, & \text{если } k=r;\\ s^j_{r-k}-s^j_{r-k+1}, & \text{если } k=r-1,\dots,-r+1;\\ s^j_{2r}, & \text{если } k=-r,\end{cases} \qquad (7)$$

где $j\in\{л,п\}$. В работе доказывается

Теорема. Если функция $\psi^{0,1}$ такова, что

$$M^{л}+M^{п}<0\text{, где } M^j=\sum_{k=-r}^{r}k\,d^j_k,\ j\in\{л,п\}, \qquad (8)$$

то найдется такое $\theta^*_\psi>0$, что при всех $\theta<\theta^*_\psi$ среда, задаваемая оператором V_ψ, неэргодична. Оценка снизу для θ^*_ψ дается формулой (18).

Теорема применима и к операторам V_φ, не представимым в виде (4) с условием (5). В общем случае следует положить

$$\theta = \varphi^1(0,\dots,0), \quad \psi^1 = \max\left\{0, \frac{\varphi^1-\theta}{1-\theta}\right\}$$

Неравенство (3) следует из двух других:

$$\delta_0 (V_\varphi)^t (\underbrace{1,\dots,1}_{s+1}) \le \delta_0 (W S_\theta)^t (\underbrace{1,\dots,1}_{s+1}), \tag{9}$$

$$\delta_0 (W S_\theta)^t (\underbrace{1,\dots,1}_{s+1}) \le c < 1, \tag{10}$$

где оператор W есть суперпозиция двух: $W = W_1 W_2$. Определим их.

Будем называть массивом единиц (или массивом нулей) максимальное множество идущих подряд единиц (или, соответственно, нулей) в последовательности x . При $0<\theta<1$ все меры $\mu^{(t)}$ при $t>0$, о которых будет идти речь ниже, равны нулю на множестве последовательностей, содержащих бесконечные массивы, и мы исключим их из рассмотрения.

Определение W_1 : оператор W_1 переводит δ_x в $\delta_{x'}$, где последовательность x' отличается от x тем, что все нули, составляющие массивы длины не более $2r-1$, заменяются на единицы.

Определим W_2 . Пусть каждому полуцелому числу вида $i+\frac{1}{2}$ сопоставлены независимые случайные переменные $\xi_{i+\frac{1}{2}}$, $\eta_{i+\frac{1}{2}}$, принимающие целые значения $-r,\dots,r$ с вероятностями:

Вер.$\{\xi_{i+\frac{1}{2}} = k\} = d_k^{Л}$, Вер.$\{\eta_{i+\frac{1}{2}} = k\} = d_k^{П}$, $-r \le k \le r$

Мера $\delta_x W_2$ индуцируется этим распределением при следующем отображении $X \cdot \{\xi, \eta\}$ на X : $y_i = 1$ тогда и только тогда, если найдутся такие k , l , $k \le l$, что

$$x_{k-1}=0, \; x_k = \dots = x_l = 1, \; x_{l+1} = 0, \; k - \xi_{k-\frac{1}{2}} \le i \le l + \eta_{l+\frac{1}{2}} .$$

Иными словами, каждый массив единиц с концами k , l удлиняется слева на $\xi_{k-\frac{1}{2}}$ и справа на $\eta_{l+\frac{1}{2}}$.

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (9). Применим упорядочение мер и операторов по Митюшину / 4 / при том же упорядочении X. Достаточно доказать:

а) что оператор WS_θ монотонный; это легко вывести из определений.

б) что $V_\psi \prec WS_\theta$. Достаточно доказать для любой x, содержащей бесконечно много массивов нулей длины не менее $2z$:

$$\delta_x V_\psi \prec \delta_x W. \qquad (11)$$

Разрежем последовательность индексов $\ldots,-1,0,1,\ldots$ на куски так, чтобы в x на концах каждого куска стояло не менее z нулей подряд. Каждая из мер $\delta_x V_\psi$, $\delta_x W$ представится как произведение мер на этих кусках, так как распределения на разных кусках независимы друг от друга. Н.Б.Васильев показал, что (II) вытекает из аналогичных соотношений для проекций этих мер на каждый кусок:

$$\{\delta_x V_\psi\}_j \prec \{\delta_x W\}_j \qquad (12)$$

Пусть k, ℓ — координаты крайних единиц в x на j-ом куске. Мера $\{\delta_x W\}_j$ индуцируется заданным выше распределением величин $\xi_{k-\frac{1}{2}}$, $\eta_{\ell+\frac{1}{2}}$ (назовем его $\pi(\xi_{k-\frac{1}{2}}, \eta_{\ell+\frac{1}{2}}) = d^{\Pi}_{\xi_{k-\frac{1}{2}}} \cdot d^{\Pi^2}_{\eta_{\ell+\frac{1}{2}}}$) при заданном выше отображении f (см. определение W_2) : $\{\delta_x W\}_j = \pi f$.

Мы только "увеличим" меру $\{\delta_x V_\psi\}_j$, если заполним единицами всякий внутренний массив нулей на j -ом куске. Полученная мера индуцируется некоторым распределением $\rho(\xi_{k-\frac{1}{2}}, \eta_{\ell+\frac{1}{2}})$:

$$\{\delta_x V_\psi\}_j \prec \rho f$$

Достаточно доказать, что $\rho f \prec \pi f$. Это вытекает из соотношения $\rho \prec \pi$, которое проверяется непосредственно.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (10). Пусть переменные $\ldots, \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, \ldots$ независимы и равны $1, 0$ с вероятностью θ, $1-\theta$. Тогда мера

$\delta_x S_\theta$ индуцируется этой мерой при отображении $X \cdot \{\gamma\}$ на X : $y_i = \max\{x_i, \gamma_i\}$. Обозначим через x^t реализацию меры $\delta_0 (WS_\theta)^t$ и через $\xi^{t-1}, \eta^{t-1}, \gamma^t$ переменные, участвующие в t -ом применении оператора WS_θ. Если они фиксированы при всех $t \leq t_0$, то и все $x_i^{t_0}$ принимают определенные значения. Как и в / 5 /, доказательство (I0) основано на том, что множество тех значений $\xi_{i+\frac{1}{2}}^{t-1}$, $\eta_{i+\frac{1}{2}}^{t-1}$, γ_i^t, $t \leq t_0$, при которых

$$x_0^{t_0} = \ldots = x_s^{t_0} = 1, \tag{I3}$$

с точностью до множества меры нуль представляется как объединение счетной совокупности цилиндрических множеств, и вероятность (I3) оценивается сверху суммой их мер.

Пусть (I3) выполняется. Можно считать, что

$$x_{k-1}^{t_0} = 0, \; x_k^{t_0} = \ldots = x_\ell^{t_0} = 1, \; x_{\ell+1}^{t_0} = 0, \; k \leq 0, \; \ell \geq s.$$

Образуем двумерное множество $\mathcal{D}$ точек вида (i, t) по следующим правилам:

а) $(k, t_0), \ldots, (\ell, t_0) \in \mathcal{D}$;

б) если $(i,t) \in \mathcal{D}$, $x_j^{t-1} = 1$, $|i-j| \leq r$, то $(j, t-1) \in \mathcal{D}$;

в) никакие (i, t), кроме задаваемых правилами (а,б) не входят в $\mathcal{D}$.

Цилиндрическое множество, в которое мы включаем данную реализацию, получается фиксацией всех тех переменных $\xi_{i+\frac{1}{2}}^t$, $\eta_{i+\frac{1}{2}}^t$, γ_i^t, значения которых обеспечивают, что множество $\mathcal{D}$ заполнено единицами. Составим конечную ломаную с вершинами $(i_k + \frac{1}{2}, t_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Точка $(i+\frac{1}{2}, t)$ является её вершиной, если $\xi_{i+\frac{1}{2}}^t$ или $\eta_{i+\frac{1}{2}}^t$ или γ_i^t или γ_{i+1}^t входит в множество зафиксированных переменных. Кроме того в неё входят точки

$(k-\frac{1}{2}, t_0)$, $(\ell+\frac{1}{2}, t_0)$, служащие её началом и концом. Эта ломаная "окаймляет" $\mathcal{D}$ и аналогична проводящему пути от T_1T_1 к T_2T_2 в / 5 /. Припишем каждому её звену тип m : $m=1,4$ если звену (т.е. его нижнему концу) соответствует переменная $\xi^t_{i+\frac{1}{2}}$, $\eta^t_{i+\frac{1}{2}}$, $m=2$, если звену (т.е. его центру) соответствует переменная γ^t_i, $m=3$, если звену не соответствует никакая переменная.

Назовем правильной всякую конечную ломаную вида $(i_k+\frac{1}{2}, t_k)$, $k=1,\dots,n$, удовлетворяющую следующим требованиям:

а) $t_1=t_0$, $i_1<0$;

б) каждому звену ломаной приписали тип $m_k=1,2,3,4$ $(k=1,\dots,n-1)$, причем:

$$\left.\begin{array}{l} \text{если } m_k=1, \text{ то } t_{k+1}-t_k=-1,\ i_{k+1}-i_k\in\{-2,\dots,2\}, \\ \text{если } m_k=2, \text{ то } t_{k+1}-t_k=0,\ i_{k+1}-i_k=1; \\ \text{если } m_k=3, \text{ то } t_{k+1}-t_k=0,\ i_{k+1}-i_k\in\{1,\dots,2\}; \\ \text{если } m_k=4, \text{ то } t_{k+1}-t_k=1,\ i_{k+1}-i_k\in\{-2,\dots,2\}; \end{array}\right\} \quad (14)$$

в) запрещены упорядоченные сочетания типов звеньев 13,14,33,34, 41;

Припишем всякой правильной ломаной вес, равный $\prod_{k=1}^{n-1}\tau_k$, где τ_k равно: $d^{\Lambda}_{i_{k+1}-i_k}$, если $m_k=1$; θ, если $m_k=2$; 1, если $m_k=3$; $d^{\Pi}_{i_{k+1}-i_k}$, если $m_k=4$.

Ломаная, окаймляющая $\mathcal{D}$, является правильной. Её вес равен мере того цилиндрического множества, в которое мы включили данную реализацию.

Определим $\sigma^n_m(i+\frac{1}{2}, t)$, $m=1,2,3,4$, $n=0,1,2,\dots$ как сумму весов всех правильных ломаных, в которых n вершин, $t_n=t$, $i_n=i$, $m_{n-1}=m$. Мы доказали, что

$$\delta_0(WS_\theta)^{t_0}(x_0=\dots=x_5=1)\le\sum_{m=1}^{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^n_m(i+\tfrac{1}{2}, t_0) \quad (15)$$

Индукцией по n легко доказать, что сходятся ряды

$$\Sigma_m^n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sigma_m^n\left(i+\tfrac{1}{2}, t\right) \alpha^i \beta^{t-t_0},$$

где α, β - константы, $\alpha > 1$, $\beta > 0$. Векторы их сумм $\overline{\Sigma}^n = \{\Sigma_1^n, \Sigma_2^n, \Sigma_3^n, \Sigma_4^n\}$ удовлетворяют соотношению $\overline{\Sigma}^n = \overline{\Sigma}^{n-1}\mu$, где μ - матрица

$$\mu = \begin{pmatrix} \beta^{-1}A & \theta\alpha & 0 & 0 \\ \beta^{-1}A & \theta\alpha & C & \beta B \\ \beta^{-1}A & \theta\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \theta\alpha & C & \beta B \end{pmatrix}$$

в которой $A = \sum_{k=-r}^{r} d_k^{Л} \alpha^k$, $B = \sum_{k=-r}^{r} d_k^{П} \alpha^k$, $C = \sum_{k=1}^{2r} \alpha^k$. Из (I5)

$$\delta_0 (WS_\theta)^{t_0} (x_0 = \ldots = x_s = 1) \leq \alpha^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{4} \Sigma_m^n . \qquad \text{(I6)}$$

Пользуясь теоремой Фробениуса / 6 /, легко доказать, что условие $|E-\mu| > 0$ достаточно для того, чтобы ряд в правой части (I6) сходился. Вычислив определитель и подставив $\beta = \sqrt{A/B}$, преобразуем это условие к виду:

$$\theta < \frac{(1-\sqrt{AB})^2}{\alpha(1+C-AB)} \qquad \text{(I7)}$$

Заметим, что при $\alpha = 1$ $AB = 1$, $(AB)'_\alpha = M^Л + M^П < 0$. Поэтому найдётся $\alpha > 1$, при котором правая часть (I7) положительна. Пусть $\alpha > 1$ и (I7) выполняется. Тогда сумма в правой части (I6) конечна, и при достаточно большом s правая часть (I6) меньше единицы. Таким образом,

$$\theta_\Psi^* \geq \sup_{\alpha > 1} \frac{(1-\sqrt{AB})^2}{\alpha(1+C-AB)} \qquad \text{(I8)}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пятецкий-Шапиро И.И., Ставская О.Н. Об однородных сетях из спонтанно-активных элементов. Проблемы кибернетики, 20,1968.
2. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М.-Л. "Онти", 1936.
3. Немыцкий В.В. Метод неподвижных точек в анализе. УМН,I,1936.
4. Митюшин Л.Г. Неэргодичность однородных пороговых сетей при малом самовозбуждении. ППИ, т.6, 3, 1970.
5. Тоом А.Л. Об одном семействе сетей из формальных нейронов. ДАН СССР, 183, I, 1968.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. 1967. Гл.XIII.