ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том XII 1976 Вып. 2

УДК 62-507:518.5

ДВА РЕЗУЛЬТАТА О НЕВЫЧИСЛИМОСТИ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ МОЗАИЧНЫХ АВТОМАТОВ

А. Л. Тоом, Л. Г. Митюшин

Оператор P с локальным взаимодействием действует на совокупности островов — конечных подмножеств целочисленной прямой. Доказываются два утверждения об алгоритмической невычислимости для таких операторов.

§ 1. Основные формулировки

Одномерный мозаичный автомат — это специального вида оператор P: $X_n \to X_n$. Он действует на пространстве X_n, состоящем из всех бесконечных в обе стороны последовательностей, члены которых — целые числа от 0 до n

$$X_n = S_n^{\mathbf{Z}} = \{x\}, \quad x = (x_i), \quad x_i \in S_n = \{0, \ldots, n\}, \qquad i \in \mathbf{Z}.$$

Автомат P, действующий на X_n (слово «мозаичный» будем большей частью опускать), задается натуральным числом — радиусом r и функцией f: $S_n^{2r+1} \to S_n$ и имеет следующий вид. Для любого $x \in X_n$ i-я компонента Px равна

(1) $$(Px)_i = f(x_{i-r}, \ldots, x_{i+r}).$$

Данная работа вместе с предыдущей [1] принадлежит к направлению, изучающему возможности алгоритмического предсказания поведения таких автоматов. Будем все время предполагать, что

(2) $$f(0, \ldots, 0) = 0.$$

Определение 1. Назовем $x \in X_n$ *островом*, если лишь конечное число его компонент x_i отлично от нуля. Назовем x *пустым островом*, если все его компоненты — нули.

Обозначим X_n' совокупность островов в X_n. Вследствие условия (2) P всегда переводит X_n' в себя, и мы будем всегда рассматривать сужение P на X_n'. Очевидно также, что P всегда переводит пустой остров в себя.

Определение 2. Скажем, что автомат P *размывает* остров x, если существует натуральное t, такое, что $P^t x$ — пустой остров.

Определение 3. Назовем автомат P *бинарным*, если он действует на X_1. Назовем бинарный автомат P *монотонным*, если задающая его функция f (в этом случае булевская) монотонна, т. е.

(3) $$a_{-r} \leqslant a_{-r}', \ldots, a_r \leqslant a_r' \Rightarrow f(a_{-r}, \ldots, a_r) \leqslant f(a_{-r}', \ldots, a_r').$$

Основные результаты работы заключаются в следующих двух предложениях.

Предложение 1. *Существует такой остров $x^0 \in X_1'$, например остров с двумя единицами вида*

(4) $\ldots 001100 \ldots,$

что невычислимо по любому монотонному бинарному автомату P определить, размывает ли P остров x^0.

Предложение 2. *Существует такой монотонный бинарный автомат P_0, что невычислимо по любому острову $x \in X_1'$ определить, размывает ли P_0 остров x.*

Для того чтобы эти два утверждения имели точный смысл, необходимо выбрать какой-то способ нумерации островов в X_1' и монотонных бинарных автоматов. Припишем всякому острову $x=(x_i) \in X_1'$ номер, равный

$$x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (2^{2k-1} x_k + 2^{2k} x_{-k}).$$

Все бинарные автоматы пронумеруем в порядке возрастания радиуса r, а при равных r — в порядке возрастания числа, двоичной записью которого служит таблица, задающая функцию $f(a_{-r}, \ldots, a_r)$. Невычислимость в формулировках обоих предложений означает нерекурсивность соответствующих предикатных функций в выбранных нами нумерациях.

Предложения 1, 2 образуют контраст с результатами работы [1], утверждающими по существу вычислимость некоторых свойств монотонных бинарных автоматов, также связанных с понятием размывания островов. Другой результат о вычислимости, также связанный с размыванием островов, дан в [2]. Вариант предложения 1 для немонотонных операторов дан в § 2 нашей работы. Решающую роль в доказательствах играет

Основная лемма. *Существует такое вычислимое отображение $\varphi(T)$, переводящее всякую машину Тьюринга T в монотонный бинарный автомат, и такое вычислимое отображение $\Psi_T(\pi)$, переводящее всякую программу π для T в остров X_1' (и зависящее от T как от параметра), что автомат $\varphi(T)$ размывает остров $\Psi_T(\pi)$ в том и только том случае, если машина T применима к программе π. При этом пустая программа при всех T переводится в остров (4). Вычислимость обоих отображений понимается как рекурсивность функций в выбранных нами нумерациях автоматов и островов и стандартной геделевской нумерации машин Тьюринга и их программ.*

Прежде чем доказывать основную лемму, выведем из нее наши предложения. Докажем предложение 1. Если бы существовал алгоритм, по любому монотонному бинарному автомату P, определяющий, размывает ли P остров (4), то, примененный к $\varphi(T)$, этот алгоритм определял бы, применима ли произвольная машина Тьюринга T к пустой программе, что невозможно (см., например, [3]).

Докажем предложение 2. Пусть T_0 — какая-нибудь универсальная машина Тьюринга. Тогда $P_0=\varphi(T_0)$ — искомый автомат. Действительно, если бы существовал алгоритм, по всякому острову x, определяющий, размывает ли P_0 остров x, то этот алгоритм, примененный к $\Psi_{T_0}(\pi)$, определял бы, применима ли T_0 к произвольной программе π, что невозможно.

§ 2. Доказательство основной леммы

Отображения $\varphi(T)$ и $\Psi_T(\pi)$ построим в пять этапов: каждое в виде композиции пяти отображений. Каждое из этих десяти отображений вычислимо (имеются в виду определенные нумерации, которые мы не будем выписывать). Вычислимость всех этих отображений легко усмотреть из явного способа их задания, и мы не будем останавливаться на ее доказательстве.

I этап. Лемма 1. *Существует такое вычислимое отображение $\varphi^1(T)$, переводящее всякую машину Тьюринга T в другую машину Тьюринга, и такое вычислимое отображение $\Psi_T^1(\pi)$, переводящее всякую программу π для T в программу для $\varphi^1(T)$, что:* а) *$\varphi^1(T)$ применима к $\Psi_T^1(\pi)$, если и только если T применима к π,* б) *если $\varphi^1(T)$ применима к $\Psi_T^1(\pi)$, то по окончании ее работы лента пуста — на ней нет ни одного ненулевого символа.*

Доказательство леммы 1 несложно, и мы его опускаем.

II этап. Лемма 2. *Существует такое вычислимое отображение $\varphi^2(T)$, переводящее всякую машину Тьюринга T в мозаичный автомат с радиусом $r=1$, и такое вычислимое отображение $\Psi_T^2(\pi)$, переводящее всякую программу π для T в остров в пространстве, на котором этот автомат действует, что автомат $\varphi^2(T)$ размывает остров $\Psi_T^2(\pi)$ в том и только том случае, если T применима к программе π и по окончании ее работы лента пуста. При этом пустая программа переводится отображением Ψ_T^2 при всех T в остров с одной единицей*

$$(5) \qquad \ldots 0001000 \ldots .$$

Для доказательства леммы 2 достаточно взять отображения, описанные при доказательстве теоремы 4 в [4] с одним лишь изменением: остров, изображающий конечное состояние машины на пустой ленте, под действием оператора $\varphi^2(T)$ переходит в пустой остров.

III этап. Лемма 3. *Существует такое вычислимое отображение $\varphi^3(P)$, переводящее всякий автомат P с радиусом $r=1$ в бинарный автомат, и такое вычислимое отображение $\Psi_P^3(x)$, переводящее всякий остров в пространстве, на котором действует P, в остров в X_1, что автомат $\varphi^3(P)$ размывает остров $\Psi_P^3(x)$, если и только если автомат P размывает остров x. При этом $\Psi_P^3(x)$ при всех P переводит остров вида* (5) *в остров такого же вида* (5).

Доказательство. Аналогичные конструкции, описанные в [5], нам не годятся, так как не переводят острова в острова. Поэтому придется дать полное описание. Пусть автомат P с радиусом $r=1$ действует на пространстве X_n и задается функцией $f(a_1, a_2, a_3)$, $f\colon S_n^3 \to S_n$. Опишем сначала отображение $\Psi_P^3(x)$. Сопоставим каждому символу $a \in S_n$ его код $C(a)$ — кортеж из нулей и единиц длины $n+3$ по следующему правилу:

$$(6) \qquad C(0)=\underbrace{0\ldots0}_{n+3 \text{ нуля}},\quad C(1)=\underbrace{0\ldots0}_{n+2 \text{ нуля}}1,$$

$$C(k)=11\underbrace{0\ldots0}, \quad 2\leqslant k\leqslant n$$

на $(k-1)$-м из этих $n-1$ мест, охваченных фигурной скобкой, у $C(k)$, $2\leqslant k\leqslant n$, помещается единица, на остальных местах — нули.

Отображение $\Psi_P^3(x)$ сопоставляет всякому острову $x=(x_i)$ остров — последовательность, получающуюся, если записать подряд коды $\ldots, C(x_{-1}), C(x_0), C(x_1), \ldots$, причем первый разряд кода $C(x_0)$ помещается в нулевом месте.

Определим теперь автомат $\varphi^3(P)$. Он задается радиусом $R=3n+8$ и булевской функцией $F(a_{-R}, \ldots, a_R)$, определяемой следующим условием А.

Пусть существует такое k, $0\leqslant k\leqslant n+2$, что последовательность $a_{-R+k}, \ldots, a_{R-(n+2)+k}$ представляет собой пять записанных подряд кодов $C(b_1)$, $C(b_2)$, $C(b_3)$, $C(b_4)$, $C(b_5)$, где $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \in S_n$. Тогда $F(a_{-R}, \ldots$

..., a_R) *должна быть равна* $(n+3-k)$*-му разряду кода* $C(f(b_2, b_3, b_4))$. В случаях, не предусмотренных этим условием, значение функции $F(a_{-R}, \ldots, a_R)$ несущественно. Положим его равным нулю.

Замечание 1. Пусть два кода $C(b_1)$, $C(b_2)$, записанные подряд, образуют последовательность $a_1, \ldots, a_{2n+6}$ и пусть существует такое k, что $2 \leqslant k \leqslant n+3$ и что $a_k, \ldots, a_{k+n+2}$ образуют код $C(b_3)$. Тогда $b_3=0$. Это легко доказать, пользуясь лишь (6).

Следствие. *Условие* (A) *непротиворечиво.*

Таким образом, отображение $\varphi^3(P)$ задано. Пользуясь условием (A), легко доказать утверждение леммы 3.

Фактически мы уже доказали аналоги предложений 1, 2, только не для монотонных, а для произвольных бинарных автоматов. Сформулируем одно из них.

Предложение 1′. *Невычислимо по любому бинарному мозаичному автомату определить, размывает ли он остров* (5).

Замечание 2. Вычислимо по любому монотонному бинарному мозаичному автомату P определить, размывает ли он остров (5). Действительно, если остров $P(5)$ не пуст, то P (монотонный) не размывает (5). Таким образом, учитывая дальнейшие построения, получаем, что два — минимальное число единиц в острове x^0, для которого верно предложение 1.

IV этап. Отображение φ^4 (P) переводит всякий бинарный автомат в автомат специального вида (удобный для его дальнейшего моделирования монотонным бинарным автоматом). Автомат $\varphi^4(P)$ при всех P имеет параметр n, равный 5. Для большей выразительности будем обозначать шесть состояний 0, 1, 2, 3, 4, 5 соответственно через

$$(7)\qquad \varnothing, E, 0, \mathbf{1}, \boldsymbol{(}, \boldsymbol{)}.$$

Отображение $\Psi^4(x)$ переводит всякий остров $x \in X_1'$ в остров в X_5' по следующему правилу:

а) если $x = \ldots 000 \ldots$, то $\Psi^4(x) = \ldots \varnothing\varnothing\varnothing \ldots$,

б) если остров x содержит одну единицу: $x = \ldots 00100 \ldots$, то $\Psi^4(x) = \ldots \varnothing\varnothing E \varnothing\varnothing \ldots$, причем символ E стоит на том же месте, на котором в x стоит единица,

в) если остров x содержит по меньшей мере две единицы, то остров $\Psi^4(x)$ получается из x последовательным применением следующих операций:

1) заменить все единицы в x на $\mathbf{1}$,
2) заменить все нули, расположенные между единицами, на $\mathbf{0}$,
3) заменить самый правый нуль, слева от которого нет единиц, на $\boldsymbol{(}$,
4) заменить самый левый нуль, справа от которого нет единиц, на $\boldsymbol{)}$,
5) заменить прочие нули на $\varnothing$.

Пример. Если $x = \ldots 000\,100\,1\,000\,1\,000 \ldots$, то $\Psi^4(x) = \ldots \varnothing\varnothing \boldsymbol{(}\mathbf{10010001}\boldsymbol{)} \varnothing\varnothing \ldots$

Отображение $\Psi^4(x)$ описано. Опишем теперь отображение $\varphi^4(P)$. Пусть автомат P задается радиусом r и функцией $f(a_{-r}, \ldots, a_r)$. Тогда автомат $\varphi^4(P)$ задается радиусом $2r+1$ и функцией $F(b_{-(2r+1)}, \ldots, b_{2r+1})$, которую опишем следующим образом. Заранее скажем, что автомат $\varphi^4(P)$ *недоопределен*, т. е. функция $F(b_{-(2r+1)}, \ldots, b_{2r+1})$ определена не на всех наборах значений аргументов.

Именно, $F(b_{-(2r+1)}, \ldots, b_{2r+1})$ определена на тех и только тех наборах $b_{-(2r+1)}, \ldots, b_{2r+1}$, которые могут быть доопределены до целого острова $b = (b_i)$, $i \in Z$, представимого как $b = \tau^k \Psi^4(x)$, где $x \in X_1'$, а τ^k — оператор сдвига по прямой на k единиц вправо. Легко выписать это условие на набор $b_{-(2r+1)}, \ldots, b_{2r+1}$ в явном виде.

Замечание 3. Превратим набор (7) в частично-упорядоченное множество по следующему правилу: *$\varnothing \prec b$ и $b \prec b$ при всех b, принадлежащих* (7). *Все прочие пары элементов* (7) *несравнимы.*

Тогда, если функция F определена на двух различных наборах $b_{-(2r+1)}, \ldots, b_{2r+1}$ и $b'_{-(2r+1)}, \ldots, b'_{2r+1}$ и $b_k \prec b_k'$ при всех k от $-(2r+1)$ до $2r+1$, то $b_{-(2r+1)} = \ldots = b_{2r+1} = \varnothing$.

Для того чтобы определить автомат $\varphi^4(P)$, введем три вспомогательных оператора Q_1, Q_2, Q_3, действующих на X_5'. Введем отображение g: $S_5 \to S_1$ вида

$$g(E) = g(1) = 1, \qquad g(\varnothing) = g(0) = g(\,\boldsymbol{(}\,) = g(\,\boldsymbol{)}\,) = 0.$$

Оператор Q_1 с радиусом, равным r, задается следующей функцией $F_1(b_{-r}, \ldots, b_r)$:

$$F_1(b_{-r}, \ldots, b_r) = \begin{cases} 1, \text{ если } f(g(b_{-r}), \ldots, g(b_r)) = 1, \\ 0, \text{ если } f(g(b_{-r}), \ldots, g(b_r)) = 0, \\ \text{и } b_0 \text{ равно } 0 \text{ или } 1, \\ \varnothing \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Оператор Q_2 с радиусом, равным r, задается следующей функцией $F_2(b_{-r}, \ldots, b_r)$:

$$F_2(b_{-r}, \ldots, b_r) = \begin{cases} 0, \text{ если } b_0 = \varnothing \text{ и существуют} \\ k, l \text{ такие, что } -r \leqslant k < 0 < l \leqslant r \\ \text{и } b_k \neq \varnothing \text{ и } b_l \neq \varnothing, \\ b_0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Оператор Q_3 с радиусом, равным 1, задается функцией $F_3(b_{-1}, b_0, b_1)$ (см. таблицу).

Таблица

b_{-1}	b_0	b_1	$F_3(b_{-1}, b_0, b_1)$
Любое	**1**	Любое	**1**
Не **1**	$\varnothing$	Не **1**	$\varnothing$
1	$\varnothing$	$\varnothing$	**)**
$\varnothing$	$\varnothing$	**1**	**(**
Не $\varnothing$	**0**	Не $\varnothing$	**0**
$\varnothing$	**0**	Не $\varnothing$	**(**
Не $\varnothing$	**0**	$\varnothing$	**)**
$\varnothing$	**0**	$\varnothing$	$\varnothing$

В случаях, не указанных в таблице, функция F_3 не определена.

Определим функцию $F(b_{-(2r+1)}, \ldots, b_{2r+1})$, задающую автомат $\varphi^4(P)$, следующим образом:

а) Если набор $b_{-(2r+1)}, \ldots, b_{2r+1}$ представим как часть бесконечного набора — острова $b = (b_i)$ вида $b = \tau^k \psi^4(x)$, причем число единиц в x не равно единице, то $F(b_{-(2r+1)}, \ldots, b_{2r+1})$ совпадает с функцией, задающей автомат-оператор $Q_3 Q_2 Q_1$, являющийся композицией трех операторов, описанных выше.

б) Если набор $b_{-(2r+1)}, \ldots, b_{2r+1}$ имеет вид «$b_k = E$, все прочие b_l при всех $l \neq k$ равны $\varnothing$», то значение $F(b_{-(2r+1)}, \ldots, b_{2r+1})$ совпадает со значением $F(b'_{-(2r+1)}, \ldots, b'_{2r+1})$, где $b_k' = 1$, $b'_{k-1} = \boldsymbol{(}$ (если $k > -(2r+1)$), $b'_{k+1} = \boldsymbol{)}$ (если $k < 2r+1$), прочие b_l равны $\varnothing$.

в) В остальных случаях $F(b_{-(2r+1)}, \ldots, b_{2r+1})$ не определена.

Определение 4. Пусть P — недоопределенный автомат, действующий на X_n. Скажем, что P применим к $x=(x_i)\in X_n$, если задающая его функция $f(a_{-r}, \ldots, a_r)$ определена на всех наборах $x_{i-r}, \ldots, x_{i+r}$, где $i\in Z$. Если P применим к x, то определим Px формулой (1). Скажем, что P бесконечно применим к $x\in X_n$, если P применим к $P^t x$ при всех $t=0, 1, 2, \ldots$

Лемма 4. *Автомат $\varphi^4(P)$ всегда бесконечно применим к острову $\Psi^4(x)$. Автомат $\varphi^4(P)$ размывает остров $\Psi^4(x)$, если и только если P размывает x.*

Доказательство основано на том, что при всех $t>0$

$$\{[\varphi^4(P)]^t\Psi^4(x)\}_i=1 \Leftrightarrow (P^t x)_i=1$$

(знак E невозможен при $t>0$).

Если в непустом острове $[\varphi^4(P)]^t\psi^4(x)$, где $t>0$, нет ни одного знака 1, то количество мест, не занятых $\varnothing$, уменьшается на каждом такте, и остров становится пустым.

V этап. Лемма 5. *Существует такое вычислимое отображение $\varphi^5(P)$, переводящее всякий автомат P из области значений отображения φ^4 в монотонный бинарный автомат, и такое вычислимое отображение $\Psi^5(x)$, переводящее всякий остров x из области значений отображения Ψ^4 в остров в X_1, что $\varphi^5(P)$ размывает $\Psi^5(x)$ в том и только том случае, если P размывает x. При этом отображение Ψ^5 переводит остров вида* (5) *в остров вида* (4).

Доказательство. Определим сначала отображение $\Psi^5(x)$. Для этого припишем всем знакам из (7) следующие коды длины 11, состоящие из нулей и единиц:

$$\begin{cases} C(\varnothing)=00000000000, \\ C(E)=11000000000, \\ C(0)=10100100000, \\ C(1)=10100010000, \\ C(\,\boldsymbol{(}\,)=10100001000, \\ C(\,\boldsymbol{)}\,)=10100000100. \end{cases} \qquad (8)$$

Отображение $\Psi^5(x)$ переводит всякий остров $x=(x_i)\in\Psi^4(X_1')$ в последовательность, получающуюся, если записать подряд коды $\ldots, C(x_{-1}), C(x_0), C(x_1), \ldots$, причем первый разряд кода $C(x_0)$ занимает нулевое положение.

Определим теперь отображение $\varphi^5(P)$. Пусть оператор P характеризуется радиусом r и функцией $f(a_{-r}, \ldots, a_r)$. Тогда оператор $\varphi^5(P)$ задается радиусом $R=11r+21$ и функцией $F(b_{-R}, \ldots, b_R)$, определяемой следующим образом. Наложим на нее сначала следующее ограничение, которое мы будем называть условием В.

Если существует такое k, $0\leqslant k\leqslant 10$, что последовательность $b_{-R+k}, \ldots, b_{R-10+k}$ представляет собой $2r+3$ записанных подряд кодов $C(a_{-(r+1)}), \ldots, C(a_{r+1})$, где $a_{-(r+1)}, \ldots, a_{r+1}$ принадлежит набору (7), *причем $f(a_{-r}, \ldots, a_r)$ определена, то значение $F(b_{-R}, \ldots, b_R)$ должно быть равно $(k+1)$-му разряду кода $C(f(a_{-r}, \ldots, a_r))$.*

Замечание 4. Пусть последовательность $b_1, \ldots, b_{22}$, состоящая из нулей и единиц, представляет собой два написанных подряд кода $C(a_1)$, $C(a_2)$. Пусть задано k, где $2\leqslant k\leqslant 11$, и пусть выбраны $b_k', \ldots, b_{k+10}'$ такие, что $b_k'\leqslant b_k, \ldots, b_{k+10}'\leqslant b_{k+10}$. Пусть при этом $b_k', \ldots, b_{k+10}'$ образуют код $C(a_3)$. Тогда $a_3=\varnothing$.

Следствие 1. *Условие* (В) *непротиворечиво.*

Для доказательства достаточно заметить, что если для какого-то набора $b_{-R}, \ldots, b_R$ существуют k_1 и k_2 — два различных значения k, при которых выполняется условие (B), то значения $a_{-r}, \ldots, a_r$ в обоих случаях равны $\varnothing$, поэтому и $f(a_{-r}, \ldots, a_r)$ в обоих случаях равна $\varnothing$, а поэтому и требуемое условием (B) значение $F(b_{-R}, \ldots, b_R)$ в обоих случаях равно нулю.

Следствие 2. *Пусть* $b_{-R}, \ldots, b_R$ *и* $b_{-R}', \ldots, b_R'$ — *два набора из нулей и единиц, причем*

а) $b_{-R} \leqslant b_{-R}', \ldots, b_R \leqslant b_R'$,

б) $F(b_{-R}, \ldots, b_R)$ *и* $F(b_{-R}', \ldots, b_R')$ *определены условием* (B).

Тогда $F(b_{-R}, \ldots, b_R) \leqslant F(b_{-R}', \ldots, b_R')$.

Доказательство. Пусть k и k' — значения k, при которых соответственно для наборов $b_{-R}, \ldots, b_R$ и $b_{-R}', \ldots, b_R'$ выполняется условие, входящее в условие (B). Пусть $a_{-(r+1)}, \ldots, a_{r+1}$ и $a'_{-(r+1)}, \ldots, a'_{r+1}$ — соответствующие наборы элементов из (7). Рассмотрим два случая.

1. $k=k'$. Тогда из условия а) и правил кодирования (8) следует, что $a_{-r} \lessdot a_{-r}', \ldots, a_r \lessdot a_r'$. Отсюда по замечанию 3 либо $a_{-r}=a_{-r}', \ldots, a_r=a_r'$, либо $a_{-r}= \ldots =a_r=\varnothing$. В обоих случаях требуемое утверждение очевидно.

2. $k \neq k'$. Тогда $a_{-r}= \ldots =a_r=\varnothing$ по замечанию 4, откуда также следует требуемое.

Теперь определим функцию $F(a_{-R}, \ldots, a_R)$ следующим условием C.

$F(a_{-R}, \ldots, a_R)=1$ *в том и только том случае, если существует набор* $a_{-R}', \ldots, a_R'$ *такой, что*:

а) $a_k' \leqslant a_k$ *при всех* k *от* $-R$ *до* R,

б) $F(a_{-R}', \ldots, a_R')$ *определена согласно условию* (B) *и равна* 1.

Пользуясь следствием 2, легко доказать, что так определенная функция $F(a_{-R}, \ldots, a_R)$ удовлетворяет условию (B). Ее монотонность очевидна.

Оператор $\varphi^5(P)$ задан. Утверждение леммы 5 легко вывести из условия (B). Основная лемма, очевидно, следует из лемм 1—5.

Авторы благодарят А. Н. Колмогорова, по предложению которого была предпринята эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тоом А. Л.* Монотонные бинарные мозаичные автоматы. Проблемы передачи информации, 1976, 12, *1*, 48—54.
2. *Гальперин Г. А.* Одномерные локальные монотонные операторы с памятью. Докл. АН СССР, 1976, 228, *2*.
3. *Минский М.* Вычисления и автоматы. М., «Мир», 1971, 188.
4. *Smith III, A. R.* Simple Computation-Universal Cellular Spaces. J. ASSOC. Comp. Mach., 1971, 18, *3*, 339—353.
5. *Jamada H., Amoroso S.* Structural and Behavioral Equivalences of Tessellation Automata. Inform. and Control, 1971, 18, *1*, 1—31.

Поступила в редакцию
19 июня 1974 г.