ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МЕРАХ В НЕЭРГОДИЧНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ.

ТООМ А.Л.

Одинаковые стохастические автоматы с двумя состояниями 0,I соединены в бесконечную в обе стороны цепочку и функционируют во времени. Состояние "все единицы" инвариантно. При одном условии доказывается что всякая инвариантная мера, не сосредоточенная на состоянии "все единицы" (известно,что такие бывают) не принадлежит к классу "хороших" мер W_1, включающему, в частности, все конечно-марковские меры. Для одного конкретного семейства таких систем - сред Ставской / I / вводится понятие "верхней" меры. Верхние меры тоже не могут принадлежать W_1. Тем не менее указывается класс верхних мер.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ. Однородные случайные среды изучались в ряде работ / I-7 /. Используем обозначения статьи / 5 /. Пусть

$$\varphi^1(1,\dots,1)=1, \tag{I}$$

$$\varphi^1_{min}=\min_{a_{-r},\dots,a_r}\varphi^1(a_{-r},\dots,a_r)>0. \tag{2}$$

В / 2-5 / доказано существование класса сред, удовлетворяющих (I,2) и имеющих другие инвариантные игры, кроме меры δ_1, сосредоточенной в состоянии "все единицы". В § 2 будет доказана

Теорема I. Никакая мера на X (X - пространство последовательностей из нулей и единиц), отличная от δ_1 и инвариантная для однородной случайной среды, удовлетворяющей (I,2), не принадлежит W_1.

Определим W_1. Пусть Y - множество бесконечных в обе стороны последовательностей y :

$$y=\dots,y_{-1},y_0,y_1,\dots, \quad \text{где} \quad y_i\in m_y,$$

$$m_y=m_y^0\cup m_y^1,\ m_y^0=\{0_\alpha\},\ m_y^1=\{1_\beta\},$$

α, β пробегают конечные или счетные множества. Определим отображение $f: Y \to X : f(y) = x$, , где $x_i = a$, если $y_i \in m_y^a$.

Класс W_1 состоит из всех мер μ на X, каждая из которых представима как индуцированная при отображении f некоторой однородной мерой ν на Y: $\mu = \nu f$, причем m_y^1 конечно:

$$m_y^1 = \{1_1, \ldots, 1_m\},$$

и мера ν "марковская по каждому 1_α", то есть для любого α:

$$\nu(A 1_\alpha B) \cdot \nu(1_\alpha) \equiv \nu(A 1_\alpha) \cdot \nu(1_\alpha B), \qquad (3)$$

где A, B - любые комбинации символов из m_y.

В § 3 изучается однопараметрическое семейство сред - среды Ставской/ I /. В них число соседей равно двум, и функция φ_c такова:

$$\varphi_c^1(1,1) = 1 \; ; \; \varphi_c^1(0,1) = \varphi_c^1(1,0) = \varphi_c^1(0,0) = \theta. \qquad (4)$$

Известно, что при малом $\theta > 0$ они неэргодичны /2,3 / и вторая инвариантная мера $\mu_{\text{инв.}}$ (при условии $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{\text{инв}}(\underbrace{1,\ldots,1}_{n}) = 0$) единственна / 6,7 /. По теореме I, $\mu_{\text{инв.}} \notin W_1$. Назовем меру $\mu_в$ верхней, если при всех $i_1, \ldots, i_p$, $p = 1, 2, \ldots$

$$(\mu_в - \mu_в V_{\varphi_c})(x_{i_1} = \ldots = x_{i_p} = 1) \geq 0 \qquad (5)$$

Доказательство теоремы I буквально переносится и на верхние меры: все они не принадлежат W_1. Существование $\mu_в \neq \delta_1$ эквивалентно неэргодичности, и для всех $i_1, \ldots, i_p$

$$(\mu_в - \mu_{\text{инв}})(x_{i_1} = \ldots = x_{i_p} = 1) \geq 0 \qquad (6)$$

(см.равенства (2) в /I/). Доказательство неэргодичности, данное М.Г.Шнирманом / 2 /, близко к указанию одного семейства верхних мер, но, строго говоря, такого указания не содержит.

Будем искать верхние меры среди простейшего класса мер, не принадлежащих W_1 : а именно, среди мер, представимых как $\mu = \nu f$, причем $\mathcal{M}_y^0$ состоит из одного элемента, и мера ν марковская по этому элементу. Можно считать, что $\mathcal{M}_y = \{0; 1_1, 1_2, \dots\}$ мера ν марковская и определяется условными вероятностями вида $\nu(ab)/\nu(a) \equiv \nu(a \to b)$:

$$\left.\begin{aligned} &\nu(0 \to 1_1) = k_1, && \nu(0 \to 0) = 1 - k_1, \\ &\nu(1_\alpha \to 1_{\alpha+1}) = k_{\alpha+1}, && \nu(1_\alpha \to 0) = 1 - k_{\alpha+1}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Пусть при всех α

$$0 < k_{min} \leq k_\alpha \leq k_{max} < 1. \tag{8}$$

В § 3 доказывается

Теорема 2. Для того, чтобы мера $\mu = \nu f$, где ν определена в (7) при условии (8) была верхней для среды (4) при некотором $\theta > 0$, необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое $C > 0$, что при всех $n = 1, 2, \dots$

$$p_n \geq C \sum_{j=0}^{n} p_j p_{n-j} \text{ , где } p_n = \prod_{i=1}^{n} k_i \text{ , } p_0 = 1 \tag{9}$$.

Нетрудно доказать, что, если положительная ограниченная последовательность p_n удовлетворяет условию (9), то она имеет вид $p_n = d_n \varkappa^n$, где $0 < \varkappa \leq 1$, а ряд $\sum d_n x^n$ имеет радиус сходимости 1 и сходится в точке 1 . Хотя обратное, вообще говоря, неверно, это представление позволяет легко строить примеры верхних мер. Достаточно взять $\varkappa < 1$ и задать d_n . Например, годятся $d_n = n^{-c}$, где $C > 1$, или $d_n = e^{-n^c}$, где $0 < C < 1$.

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Обозначим

$$\nu(a_0,\dots,a_n)=\sum \nu(b_0,\dots,b_n),$$

где a_i кроме значений из m_y могут принимать значения $0,1,\sim$, и суммирование в правой части ведется по всем $b_0,\dots,b_n$, удовлетворяющим условиям:

если $a_i\in m_y$, то $b_i=a_i$;

если $a_i\in\{0,1\}$, то $b_i\in m_y^{a_i}$;

если $a_i=\sim$, то $b_i\in m_y$.

Кроме того, обозначаем

$$\nu(A(a)^n B)\equiv \nu(A\underbrace{a\dots a}_{n} B), \tag{10}$$

где a -любой символ, A, B – любые комбинации символов. Если все эти символы равны 0, 1 или $\sim$, то можно писать μ вместо ν.

Доказательство включает три леммы: одну об инвариантных мерах, две другие – о мерах из W_1.

Лемма I. Пусть однородная мера μ инвариантна для однородной случайной среды, удовлетворяющей (1,2). Пусть при некоторых $c_1>0$, n_1, n_2

$$\mu\left((1)^k(\sim)^{n_1}0(\sim)^{n_2}(1)^l\right)\geqslant c_1\,\mu\left((1)^k\right)\mu\left((1)^l\right) \tag{11}$$

для всех $k,l=0,1,2,\dots$. Тогда при некотором $c>0$

$$\mu\left((1)^n\right)\geqslant c\sum_{k=0}^{n}\mu\left((1)^k\right)\mu\left((1)^{n-k}\right) \tag{12}$$

для всех $n=0,1,2,\dots$.

Доказательство. Положим

$$t=\max\{0;\,2r-n_1-n_2-1\},\quad m=n-2r+n_1+n_2+t$$

Тогда $n \le m+1$, и $\mu((1)^n) \geqslant \mu((1)^{m+1}) =$

$$= \sum_{b_{-r},\dots,b_{m+r}} \mu(b_{-r},\dots,b_{m+r}) \prod_{j=1}^{m} \varphi^1(b_{j-r},\dots,b_{j+r}) \geqslant$$

$$\geqslant (\varphi^1_{min})^{n_1+n_2+1+2r+t} \sum_{k=0}^{n} \mu\left((1)^k(\sim)^{n_1}0(\sim)^{n_2}(1)^{n-k}\right) \geqslant$$

$$\geqslant C_1 (\varphi^1_{min})^{n_1+n_2+1+2r+t} \sum_{k=0}^{n} \mu((1)^k)\,\mu((1)^{n-k}),$$

где φ^1_{min} определено в (2). Лемма I доказана.

Лемма 2. Для всякой меры $\mu = \nu f \in W_1$ существует такое λ_μ, $0 \le \lambda_\mu \le 1$ и такие $\alpha_1, \alpha_2 \in \{1,\dots,m\}$, что

$$C_1 \lambda_\mu^n \le \mu((1)^n) \le C_2 \lambda_\mu^n, \tag{I3}$$

$$C_1 \lambda_\mu^n \le \nu((1)^{n-1} 1_{\alpha_1}) \tag{I4}$$

$$C_1 \lambda_\mu^n \le \nu(1_{\alpha_2}(1)^{n-1}), \tag{I5}$$

где $0 < C_1 < C_2$. Здесь правое неравенство в (I3) выполняется при $n \geqslant n_0$, прочие – при всех $n \geqslant 1$.

Доказательство. Можно считать, что $\nu(1_\alpha) > 0$ при всех α от 1 до m . Введем вектор $\bar{p} = \{\nu(1_1),\dots,\nu(1_m)\}$ и матрицы $\pi^п = \{\pi^п_{\gamma\delta}\}$, $\pi^л = \{\pi^л_{\gamma\delta}\}$ (правая, левая), где $\pi^п_{\gamma\delta} = \nu(1_\gamma 1_\delta)/\nu(1_\gamma)$, $\pi^л_{\gamma\delta} = \nu(1_\delta 1_\gamma)/\nu(1_\gamma)$.

Тогда:

а) суммы компонентов векторов $\bar{p}(\pi^п)^{n-1}$ и $\bar{p}(\pi^л)^{n-1}$ обе равны $\mu((1)^n)$;

б) α -я компонента $\bar{p}(\pi^п)^n$ равна $\nu((1)^n 1_\alpha)$;

в) α -я компонента $\bar{p}(\pi^л)^n$ равна $\nu(1_\alpha(1)^n)$.

Поскольку $\pi^п$ – матрица с неотрицательными элементами, то / 8/ одно из её собственных значений $\lambda^п_\mu$ действительно, неотрицательно и не меньше модулей всех остальных её собственных значений. Положим $\lambda_\mu = \lambda^п_\mu$. Тогда правое неравенство в (I3) очевидно. Известно / 8 /, что λ_μ^{Π} соответствует ненулевой собственный вектор $\bar{q}=\{q_1,\dots,q_m\}$, где все $q_\alpha \geq 0$, $q_1+\dots+q_m=1$. Выберем такое $C>0$, что $\bar{p} \geq C\bar{q}$ (покоординатно). Тогда

$$\mu((1)^n) \geq C(\lambda_\mu^{\Pi})^{n-1},$$

откуда следует левое неравенство в (I3). Выберем α_1 такое, что $q_{\alpha_1}>0$. Тогда

$$\nu((1)^{n-1}1_{\alpha_1}) \geq C(\lambda_\mu^{\Pi})^{n-1} q_{\alpha_1},$$

что доказывает (I4). Чтобы доказать (I5), надо ввести λ_μ^{Λ} –максимальное собственное значение π^{Λ}. Поскольку оно тоже удовлетворяет (I3), то $\lambda_\mu^{\Lambda}=\lambda_\mu^{\Pi}$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $\mu=\nu f \in W_1$, $\mu \neq \delta_1$. Тогда μ представима в виде $\mu=s\delta_1+(1-s)\mu'$, где $0 \leq s<1$, $\mu' \in W_1$, μ' удовлетворяет (II).

Доказательство. Можно считать, что m_y^0 содержит один элемент 0. Легко построить марковскую меру ρ на пространстве Z где m_Z счётно / 9 /, индуцирующую ν.

$$m_Z=\{1_\alpha;\ 0_{\alpha,\gamma};\ 0_0\},\ \alpha=1,\dots,m,\ \gamma=1,2,\dots$$

Отображение $g: Z \to Y$ таково:

$$y_i=\begin{cases} 1_\alpha & \text{, если } z_i=1_\alpha \\ 0 & \text{, если } z_i \in m_Z^0 \end{cases}.$$

(g переводит $0_{\alpha,\gamma}$ в γ-ый нуль после 1_α).

Будем говорить только о тех состояниях цепи – значениях z_i, вероятности которых положительны. Они разбиваются на конечное число $p \leq m+1$ классов. Мера ρ представима как линейная комбинация марковских мер $\rho_1,\dots,\rho_p$, сосредоточенных каждая на своём классе:

$$\rho=\sum_{j=1}^{p} d_j\rho_j,\ \text{все } d_j>0,\ d_1+\dots+d_p=1.$$

Пусть классы, не содержащие нулевых значений, соответствуют мерам $\rho_1,\dots,\rho_q$ и только им. Представим ρ в виде:

$$\rho = s\rho_1' + (1-s)\rho_2' \quad , \text{ где } s = \sum_{j=1}^{q} d_j ,$$

$$\rho_1' = \sum_{j=1}^{q} \frac{d_j}{s}\rho_j , \quad \rho_2' = \sum_{j=q+1}^{p} \frac{d_j}{1-s}\rho_j .$$

Очевидно, $s<1$, $\rho_1' g f = \delta_1$, $\rho_2' g f \in W_1$

Обозначим $\mu' = \rho_2' g f$, $\mu_j = \rho_j g f$. Тогда

$$\mu' = \sum_{j=q+1}^{p} \frac{d_j}{1-s}\mu_j , \quad \lambda_{\mu'} = \max_{q+1\le j\le p} \lambda_{\mu_j}$$

Применим лемму 2 к той мере μ_{j_0} , для которой $\lambda_{\mu_{j_0}} = \lambda_{\mu'}$

Пусть α_1, α_2 таковы, что

$$c_1 \lambda_{\mu'}^n \le \rho_{j_0}\left((1)^n 1_{\alpha_1} \right), \quad c_1 \lambda_{\mu'}^n \le \rho_{j_0}\left(1_{\alpha_2} (1)^n \right)$$

Пусть $0_{\beta,\gamma}$ - нулевое состояние, входящее в j_0 - класс.

Тогда при некоторых n_1, n_2

$$\rho_{j_0}\left(1_{\alpha_1} (\sim)^{n_1} 0_{\beta,\gamma}\right) > 0, \quad \rho_{j_0}\left(0_{\beta,\gamma} (\sim)^{n_2} 1_{\alpha_2}\right),$$

и легко вывести (II) для меры μ' .

Теперь докажем теорему I. Предположим, что $\mu \in W_1$, $\mu \ne \delta_1$, μ инвариантна для среды, удовлетворяющей (I,2). Разложим μ по лемме 3: $\mu = s\delta_1 + (1-s)\mu'$, $s<1$.

Раз μ , δ_1 инвариантны, то и μ' инвариантна. Раз μ' удовлетворяет (II) и инвариантна, то по лемме I величины $\mu'\left((1)^n\right)$ удовлетворяют (I2). Но (I2) противоречит (I3): поскольку $\mu'\left((1)^n\right)$ удовлетворяют (I3), то левая часть (I2) убывает как $\lambda_{\mu'}^n$, а правая - как $n\lambda_{\mu'}^n$. Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Необходимость следует из леммы I в § 2, в которой неравенство только усиливается, если верхняя мера μ не инвариантна. Условие (II) выполняется уже при $n_1 = n_2 = 0$ и при $c_1 = (1-k_{max})^2 / \nu(0)$.

Докажем достаточность. Пусть $\mu = \nu f$, где ν задана (7) при условии (8). Обозначим $\mu V \varphi_e = \mu^H$.

Установим сначала, что найдется $\theta_1 > 0$ такое, что при всех $\theta \leq \theta_1$

$$(\mu - \mu^H)\left((1)^n\right) \geqslant 0$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Удается непосредственно вычислить ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu - \mu^H)\left((1)^n\right) x^n =$$

$$= \frac{R - \theta\left\{(1-k_1) + [2 + (1-k_1)x]R\right\} - \theta^2\left\{(k_1 - R) + x(k_1+1)R + x^2R^2\right\}}{1 - \theta(1-k_1)x - \theta^2 x\left[k_1 + (x-1)R\right]}$$

где

$$R = k_1 + k_1 k_2 x + k_1 k_2 k_3 x^2 + \ldots$$

Для того, чтобы все коэффициенты этого ряда были неотрицательны, достаточно, чтобы были неотрицательны все коэффициенты числителя правой части, а это, очевидно, следует при некотором $\theta > 0$ из (9).

Вместо (5) доказывается более сильная система неравенств:

$$(\mu - \mu^H)\left((1)^{p_1} 0 (\sim)^{q_1} (1)^{p_2} 0 (\sim)^{q_2} \ldots (1)^{p_s}\right) \geqslant 0, \quad p_i \geqslant 1, \; q_i \geqslant 0.$$

Она вытекает из более сложной системы неравенств, доказываемой индукцией по общему числу символов в скобках. В качестве θ годится, например,

$$\theta = \frac{k_{min}^2 (1-k_{max})^6 \theta_1}{2\theta_1 + k_{min}^2 (1-k_{max})^3}$$

ЛИТЕРАТУРА

I. Ставская О.Н., Пятецкий-Шапиро И.И. Об однородных сетях из спонтанно-активных элементов. Проблемы кибернетики, 20 (I968)

2. Ширман М.Г. К вопросу об эргодичности одной цепи Маркова с бесконечным множеством состояний. Проблемы кибернетики, 20 (I968).

3. Тоом А.Л. Об одном семействе сетей из формальных нейронов. ДАН СССР, I83, I (I968).

4. Митюшин Л.Г. Неэргодичность однородных пороговых сетей при малом самовозбуждении. Проблемы передачи информации, 6,3 (I970).

5. Тоом А.Л. Неэргодичность в однородных случайных средах. См. наст.выпуск.

6. Васильев Н.Б. Корреляционные уравнения для стационарной меры одной марковской цепи. Теория вероятностей и её применения, I5, 3 (I970).

7. Васерштейн Л.Н., Леонтович А.М. Об инвариантных мерах некоторых марковских операторов, описывающих однородную случайную среду. Проблемы передачи информации, 6,I (I970).

8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М, I967. Гл.XШ.

9. Колмогоров А.Н. Цепи Маркова со счетным числом возможных состояний. Бюлл. МГУ, I, № 3 (I937).