Доклады Академии наук СССР
1968. Том 183, № 1

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

А. Л. ТООМ

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ОДНОРОДНЫХ СЕТЕЙ ИЗ ФОРМАЛЬНЫХ НЕЙРОНОВ

(*Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 III 1968*)

I. Введение. В этой статье исследуются марковские цепи, описывающие поведение некоторых сетей из формальных нейронов, обладающих свойством спонтанной активности. Задача об изучении этих сетей была предложена в ([1]). Приведем нужные нам определения. Мы опишем семейство марковских цепей, которые назовем M_n (n — натуральное или индекс n заменяется на ∞). Состояние такой марковской цепи задается набором значений переменных a_i, которые могут быть равны 0 и 1. Индекс i пробегает значения:

$$i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{для } n \text{ — натурального,}$$
$$i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad \text{если } n = \infty.$$

Каждая переменная a_i зависит от времени $t = 0, 1, \ldots$; состояние a_i в момент t будет обозначаться a_i^t. Переход от t к $t+1$ для всех цепей определяется однотипно. Для $t > 0$ вводятся переменные b_i^t, интерпретируемые в ([1]) как спонтанное самовозбуждение. Каждая из них равна единице с вероятностью θ независимо от прочих b_i^t. Полагаем по определению при $t > 0$:

$$a_i^t = \begin{cases} 1, & \text{если выполнено хотя бы одно из двух событий:} \\ & a_{i-1}^{t-1} = a_i^{t-1} = 1 \text{ или } b_i^t = 1, \\ & \text{где при } n \text{ натуральном } a_0 \equiv a_n; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1}$$

Начальные условия рассмотрим следующие:

$$\text{при } t = 0 \text{ все } a_i^0 = 0. \tag{2}$$

Каждая марковская цепь M_n (n конечно), очевидно, конечна и имеет 2^n состояний, причем состояние, в котором $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$, поглощающее. Множество состояний цепи M_∞ имеет мощность континуум; правилами перехода (1) и начальными условиями определяется мера на этом множестве для каждого $t > 0$, т. е. для любого конечного набора m значений индекса i и любого набора констант c_i ($i \in m$), равных нулю или единице, определяется вероятность события, состоящего в том, что $a_i^t = c_i$ при всех $i \in m$.

Обозначим вероятность того, что в цепи M_n $a_i^t = a_{i+1}^t = \ldots = a_{i+r-1}^i = 1$, через $P_{r,n}^t(\theta)$. Легко показать, что $P_{r,n}^t(\theta)$ монотонно возрастает по θ. Для рассматриваемых начальных условий в ([1]) показано, что существует предел, обозначаемый

$$\lim_{t\to\infty} P_{r,\infty}^t(\theta) = P_{r,\infty}^\infty(\theta).$$

В статье ([1]) получены нижние оценки для вероятностей $P_{r,n}^t(\theta)$, из которых следует, что при достаточно большом θ (например, $\theta \geqslant 0{,}37$):

а) при $n = \infty$ и любом r $P_{r,\infty}^\infty = 1$; (3)

б) при n натуральном математическое ожидание $T_n(\theta)$ того момента времени t, когда впервые $a_1^t = a_2^t = \ldots = a_n^t = 1$, не превышает

$$\mathrm{const}\cdot\log n. \tag{4}$$

На основании моделирования этих сетей на ЭВМ авторы ([1]) предполагают, что утверждения (3), (4) выполняются лишь для значений $\theta > \theta_0 > 0$ ($\theta_0 \approx 0{,}3$), а при $\theta < \theta_0$ имеет место:

а) при $n = \infty$ $\quad P^{\infty}_{r,\infty}(\theta) < 1;$ (5)

б) при n натуральном $T_n(\theta) \geqslant C^n \, (C = C(\theta) > 1)$. (6)

Этот вопрос для $n = \infty$ исследовался в ([2]), где утверждение (5) доказано для достаточно малых значений $\theta > 0$ (оценка для θ в работе не приведена). В настоящей статье будут получены верхние оценки для вероятностей $P^t_{r,n}(\theta)$, из которых следуют утверждения (5), (6) для достаточно малых θ (например, $\theta \leqslant 0{,}07$).

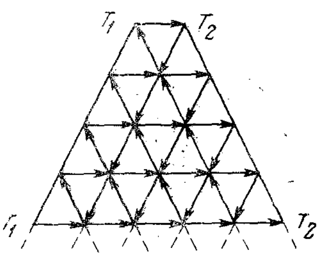

Рис. 1

Точнее говоря, утверждение (5) доказывается для $\theta < 1/C$, где константа C имеет простой геометрический смысл:

$$C = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{N^k}; \tag{7}$$

N^k — это число способов, которыми на рис. 1 можно пройти от T_1T_1 к T_2T_2, идя только в направлении стрелок, не проходя ни через одну точку более одного раза и сделав ровно k шагов вправо, причем шаги влево вверх и влево вниз не могут следовать подряд друг за другом. Существование предела (7) следует из неравенства $N^{k+l} \leqslant N^k N^l$.

Решающую роль в этих доказательствах играет интерпретация вероятностей $P^t_{r,n}(\theta)$ как вероятностей того, что проводят некоторые контактные схемы из ненадежных элементов, похожие на те, что рассматривались в статье ([3]). При этом тот факт, что функция $P^{\infty}_{r,\infty}(\theta)$ меньше 1 при $\theta < \theta_0$ (при малых θ ведет себя как θ^r) и равна единице при $\theta > \theta_0$ (см. график $P^{\infty}_{1,\infty}$ в ([1])) представляется как следствие того, что эти схемы обладают свойствами, подобными свойству надежности, описанному в ([3]), причем их ширина при $t \to \infty$ стремится к ∞, а длина остается равной r.

II. Как и в ([3]), под контактной схемой понимается граф, ребра которого могут проводить ток. Мы, однако, будем считать ребра односторонними, т. е. могущими в одном направлении проводить, а в другом не проводить.

Схема проводит от полюса M к полюсу N, если существует проводящий путь от M к N, т. е. последовательность ребер $MA_1, A_1A_2, \ldots, A_nN$, причем MA_1 проводит M к A_1 и т. д.

Схема называется плоской, если ее граф плоский. Для плоской схемы S с односторонними ребрами естественно определяется двойственная схема $\bar{S}$. Ее граф — двойственный к графу схемы S, причем ребро KL схемы $\bar{S}$, соответствующее ребру AB схемы S, где K — левая, а L — правая области, прилегающие к ребру AB плоского графа схемы S, проводит от K к L, если AB не проводит от A к B, и проводит от L к K, если AB не проводит от B к A.

Схема S не проводит от M к N тогда и только тогда, если в схеме $\bar{S}$ есть замкнутый проводящий путь $K_1K_2\ldots K_n$ (т. е. K_1K_2 проводит от K_1 к K_2 и т. п.), отделяющий M от N и обходящий M по часовой стрелке.

III. Оценка $P^t_{1,\infty}(\theta)$. Теперь вернемся к нашим марковским цепям. На рис. 2 кружками обозначены точки A_j^u. Пусть в каждую точку A_j^u помещено переменное a_j^0 при $u = 0$ и b_j^u при $u > 0$. Тогда $a_i^t = 0$ тогда и только тогда, если из точки A_i^t можно дойти до ряда точек A_j^0, идя вниз только по точкам A_j^u, занятым нулями. Это наглядное представление было замечено сразу после написания статьи ([1]). Например, Л. Г. Митющин при его помощи показал, что вероятность $P_{1,\infty}^{\,t}(\theta)$ в точности равна вероятности того, что в цепи M_∞ в момент t все a_i^t равны 1, если в момент $t = 0$ одна из них была равна нулю, а остальные единице.

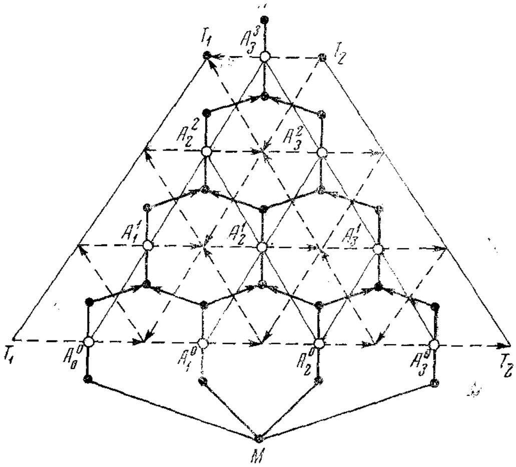

Рис. 2

Теперь построим плоскую схему $S_{1,\infty}^{\,t}$, которая проводит от M к N тогда и только тогда, если $a_i^t = 0$. Схема $S_{1,\infty}^{\,t}$ для $t = 3$ изображена на рис. 2. Ее вершины изображены черными точками. Она построена следующим образом. Через каждую точку A_j^u, $i - t + u \leqslant j \leqslant \leqslant i$, проведено вертикальное ребро, обозначаемое в дальнейшем тоже A_j^u, которое проводит вверх тогда и только тогда, если соответствующая переменная, от которой зависит a_i^t, т. е. a_j^u при $u = 0$ и b_j^u при $u > 0$, равна нулю. Нижний конец такого ребра A_j^u при $u > 0$ соединен наклонными ребрами с верхними концами ребер A_{j-1}^{u-1} и A_j^{u-1}. Эти наклонные ребра всегда проводят вверх, т. е. в направлении стрелок, и никогда в обратном. За полюс N взят верхний конец ребра A_i^t. Полюс M соединен с нижними концами ребер A_j^0 ребрами, всегда проводящими вверх (т. е. от M к этим концам). Проводимость этих ребер вниз не существенна, так же как и ребер A_j^u. Нам будет удобно считать, что эти ребра проводят вниз всегда.

Теперь построим схему $\bar{S}_{1,\infty}^{\,t}$, двойственную к $S_{1,\infty}^{j}$. Она изображена на рис. 2. Ребра, образующие линии T_1T_1 и T_2T_2, проводят всегда в обе стороны и соединены между собой проводящим всегда ребром, которое не нарисовано. Остальные ребра схемы $\bar{S}_{1,\infty}^{\,t}$ даны пунктиром. Из них ребра со стрелками (наклонные), очевидно, всегда проводят в направлении стрелок, а обратно никогда. Горизонтальные ребра B_i^t, соответствующие A_i^t, проводят вправо с вероятностью θ при $t > 0$ и не проводят при $t = 0$, а влево не проводят никогда. Будем считать, что ненарисованного ребра, соединяющего T_1 и T_2, нет, и обозначим $\bar{S}_{1,\infty}^{\,t}$ без этого ребра через $\bar{S}_{1,\infty}^{\,\prime t}$.

Вероятность $h_{T_1T_2}(\theta)$ того, что $\bar{S}_{1,\infty}^{\,\prime t}$ проводит от T_1 к T_2, равна $P_{1,\infty}^{t}(\theta)$. Оценим ее сверху. Эта вероятность меньше, чем сумма вероятностей всех событий вида: «на данном пути от T_1 к T_2 все ребра проводят». Вероятность такого события равна θ^k, где k — число горизонтальных ребер в этом пути. Можно иметь в виду только пути, не проходящие ни через одну вершину более одного раза, и в которых не идут подряд один за другим наклонные ребра разных направлений. Число таких путей, содержащих k горизонтальных ребер, в точности совпадает с N^k в формуле (7). Итак:

$$h_{T_1T_2}(\theta) < \sum_{k=1}^{\infty} N^k \theta^k. \tag{8}$$

N^k легко оценить сверху числом 3^{3k}, если закодировать каждый путь последовательностью цифр 1, 2, 3, где цифра 1 означает ребро, идущее влево вниз, 2 — вправо, 3 — влево вверх. Тогда

$$h_{T_1T_2}(\theta) < \sum_{k=1}^{\infty} N^k\theta^k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 3^{3k}\theta^k = \sum_{k=1}^{\infty} (27\theta)^k = \frac{27\theta}{1-27\theta}.$$

При $\theta < 1/54$ эта сумма меньше единицы. Итак, мы доказали утверждение (5) для $\theta < 1/54$.

Оценку N^k можно несколько улучшить, если заметить, что в последовательности, кодирующей путь, цифры 1 и 3 не могут стоять рядом. Тогда получим $N^k \leqslant \text{const}\cdot(14{,}1)^k$.

Аналогично можно учесть еще какие-нибудь запреты, например тот факт, что последовательности, кодирующие пути, не могут содержать комбинаций 321 и 123 и т. д.

IV. Другие оценки. Сначала оценим $P^t_{r,\infty}(\theta)$. Для этого построим схему $S^t_{r,\infty}$, которая проводит от M к N тогда и только тогда, если хотя бы одна из этих переменных равна нулю. Эту схему можно получить из схемы $A^{t+r-1}_{1,\infty}$, если от этой схемы отсечь все ребра $A_j{}^u$ при $u > t$ и соединяющие их ребра со стрелками, а верхние концы ребер $A_j{}^t$ соединить с вершиной N. К этой схеме построим двойственную с выброшенным ребром $\overline{S}'^t_{r,\infty}$ и аналогично предыдущему оценим сверху вероятность $h_{T_1T_2}(\theta)$ того, что схема $\overline{S}'^t_{r,\infty}$ проводит:

$$h_{T_1T_2}(\theta) \leqslant \sum_{k=r}^{\infty} N^k\theta^k \leqslant \text{const} \sum_{k=r}^{\infty} (C\theta)^k = \text{const}\,\frac{(C\theta)^r}{1-C\theta},$$

где C имеет смысл, определенный в (7).

Для любого $\theta < 1/C$ найдется такое r, что выражение меньше единицы. Отсюда можно вывести, что для любого $\theta < 1/C$ вероятность $P^t_{1,\infty}(\theta)$ тоже не стремится к единице, если использовать неравенство

$$1 - P^t_{r,\infty}(\theta) \leqslant r\,[1 - P^t_{1,\infty}(\theta)].$$

Для случая натурального n легко построить схемы $S^t_{r,n}$, аналогичные $S^t_{r,\infty}$, и двойственные к ним $\overline{S}^t_{r,n}$. Ограничимся случаем $r = n$. Легко получить оценку для $\theta < 1/8$:

$$P^t_{n,n}(\theta) \leqslant t \sum_{k=0}^{\infty} (2\sqrt{2})^{n+4k}\theta^{n+2k} = t\,\frac{(2\sqrt{2}\theta)^n}{1-8\theta}.$$

Отсюда математическое ожидание $T_n(\theta)$ того момента, когда впервые все $a_i{}^t = 1$, не меньше $(1-8\theta)\,/\,2(2\sqrt{2}\theta)^n$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 XII 1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. Н. Ставская, И. И. Пятецкий-Шапиро, Проблемы кибернетики, 20, 1968. [2] М. А. Шнирман, Проблемы кибернетики, 20, 1968. [3] Э. Ф. Мур, К. Э. Шеннон. Кибернетич. сборн., в. 1, ИЛ, 1960.