МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

ТООМ А.Л.

НЕЭРГОДИЧНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ СРЕДЫ

(Специальность – теория вероятностей)

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук

И.И. ПЯТЕЦКИЙ-ШАПИРО

Москва, 1972

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Однородные случайные среды, изучаемые в диссертации – класс марковских цепей с континуальным множеством состояний.

Опишем их. Пусть бесконечная система автоматов x_i, где i пробегает все целые числа, работает в дискретном времени $t = 0, 1, 2, \ldots$ Состояние x_i в момент t, назовем его x_i^t, равно 0 или 1. Оно вероятностным образом определяется состояниями в момент $t-1$ "соседей" автомата x_i – автоматов $x_j \in \mathcal{U}(x_i) = \{x_{i-r}, \ldots, x_{i+r}\}$. Обозначим эту зависимость так: если $x_{i-r}^{t-1} = a_{-r}, \ldots, x_{i+r}^{t-1} = a_r$, то $x_i^t = b$ с вероятностью $\varphi^b(a_{-r}, \ldots, a_r)$, $\varphi^0, \varphi^1 \geqslant 0$, $\varphi^0 + \varphi^1 \equiv 1$, где $a_{-r}, \ldots, a_r, b \in \{0, 1\}$. При этом, если значения x_j^{t-1} заданы при всех j, то все x_i^t независимы.

Работа такой системы описывается марковской цепью с множеством состояний $X = \{x\}$, $x = \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$, где $x_i \in \{0, 1\}$.

Вероятностная мера μ на X определяется её значениями на элементах σ-алгебры, порожденной цилиндрическими подмножествами, удовлетворяющими условиям согласования /4 /. Чтобы определить μ, достаточно для всех i, n задать

$$\mu(x_i = a_0, \ldots, x_{i+n} = a_n).$$

Переход от t к $t+1$ задается линейным оператором V_φ, причем $\mu^{(t+1)} = \mu^{(t)} V_\varphi$, где $\mu^{(t)}$, $\mu^{(t+1)}$ – меры в момент t, $t+1$. Обозначим δ_x меру, сосредоточенную на последовательности x. Будем определять линейные операторы задавая результаты их применения ко всем δ_x. Тогда результат их применения к произвольной мере определится так:

$$\mu V = \int (\delta_x V)\, d\mu(x),$$

где интеграл для всех вводимых операторов может быть записан как конечная сумма, так как подинтегральная функция кусочно-постоянна. В частности, операторы V_φ можно определить так: $\delta_y V_\varphi$ – мера, в которой величины x_i независимы и равны $a_i \in \{0,1\}$ с вероятностями $\varphi^{a_i}(y_{i-r},\dots,y_{i+r})$.

Мера μ называется инвариантной для данной среды, если $\mu=\mu V_\varphi$. Среда называется эргодичной, если у неё есть только одна инвариантная мера, а иначе – неэргодичной.

Диссертация принадлежит к руководимому И.И.Пятецким-Шапиро направлению, посвященному изучению однородных случайных сред (см., например, / I,2,6,9–I3 /).

Диссертация состоит из трех глав. В первой главе доказывается неэргодичность при достаточно малых значениях параметра $\theta>0$ следующих сред с двумя соседями – сред Ставской [9]:

$$\varphi^1(1,1)=1,\quad \varphi^1(1,0)=\varphi^1(0,1)=\varphi^1(0,0)=\theta. \qquad (I)$$

Одновременно рассматриваются конечные среды Ставской – марковские цепи, описывающие поведение конечной системы автоматов $x_1,\dots,x_n$. Правила функционирования автоматов те же самые, только $U(x_1)=\{x_n, x_1\}$ (автоматы соединены в окружность). Очевидно, такая конечная цепь эргодична, и состояние "все единицы" поглощающие. Для таких сред при малых $\theta>0$ доказывается аналог неэргодичности: быстрый, а именно показательный, рост по n при фиксировании θ величины $T_n(\theta)$ – математического ожидания того момента t, когда впервые $x_1^t=\dots=x_n^t=1$, если при $t=0$ все автоматы были в состоянии O.

Существование положительных значений θ, при которых выполняются эти два факта, доказываемые в первой главе, было предсказано в [9] на основании результатов моделирования на ЦВМ. Существование $\theta > 0$, при которых выполняется первый из них - неэргодичность в бесконечных средах Ставской, было доказано М.Г.Ширманом [13] существенно иным методом, и оценка для θ в его работе не была приведена. Указание класса "верхних" мер в § 3 гл.III данной диссертации можно рассматривать как усиление и развитие метода Ширмана.

Во второй главе доказывается неэргодичность некоторого класса сред с произвольным числом соседей. Для всех них

$$\varphi^1(1,\dots,1) = 1. \tag{2}$$

Поэтому мера δ_1, сосредоточенная на последовательности "все единицы" инвариантна, и неэргодичность выражается в существовании еще хотя бы одной инвариантной меры.

С небольшой потерей общности можно считать, что речь идет об операторах вида $V_\varphi = V_\psi S_\theta$, где V_ψ - оператор того же вида, определяемый функциями ψ^0, ψ^1, причем

$$\psi^0(0,\dots,0) = \psi^1(1,\dots,1) = 1, \tag{3}$$

а S_θ - оператор, действие которого состоит в независимой с смене с вероятностью θ всех нулей на единицы.

Назовем оператор V_ψ, удовлетворяющий (3), "подходящим", если найдется такое $\theta > 0$, при котором оператор $V_\varphi = V_\psi S_\theta$ неэргодичен.

Неточная, но короткая формулировка условия, обеспечивающего, что V_ψ подходящий: при действии V_ψ на меру δ_x каждый массив нулей должен в среднем (по реализациям) удлиняться (а не укорачиваться), причем должна существовать единая оценка такого удлинения для всех комбинаций значений переменных, стоящих за единицами, окаймляющими этот массив. В этом смысле результат сильнее, чем в работе Л.Г.Митюшина [6], где массив нулей должен удлиняться заведомо, а не в среднем.

Фактически в главах I,II будут доказываться неравенства

$$\delta_0 (V_\varphi)^t (\underbrace{1,\dots,1}_{s}) \le c < 1, \quad t = 1,2,\dots \qquad (4)$$

где δ_0 - мера, сосредоточенная на последовательности "все нули". Из этих неравенств легко вывести существование инвариантной меры, отличной от δ_1, применив теорему о неподвижной точке [8]. Для этого в пространстве мер удобно ввести метрику:

$$\rho(\mu,\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{a_0,\dots,a_k} \rho_{a_0,\dots,a_k} \left| \mu(a_0,\dots,a_k) - \nu(a_0,\dots,a_k) \right|,$$

где коэффициенты $\rho_{a_0,\dots,a_k}$ положительны и образуют сходящийся ряд. Возьмем замкнутую выпуклую оболочку мер δ_0, $\delta_0 V_\varphi$, $\delta_0 (V_\varphi)^2, \dots$. Легко доказать, что это компакт. Оператор V_φ переводит его в себя, и поэтому в нем найдется точка $\tilde\mu = \tilde\mu V_\varphi$. Очевидно, $\tilde\mu(\underbrace{1,\dots,1}_{s}) \le c$ и поэтому $\tilde\mu \ne \delta_1$. Очевидно также, что полученная мера $\tilde\mu$ однородна, т.е. переходит в себя при сдвиге $i \to i+1$. Поэтому фактически доказывается неэргодичность в классе однородных мер.

Однородными называются меры, переходящие в себя при сдвиге $i \to i+1$. Они задаются величинами

$$\mu(a_0, \ldots, a_n) \equiv \mu(x_i = a_0, \ldots, x_{i+n} = a_n). \tag{5}$$

Класс однородных мер инвариантен относительно всех вводимых операторов.

В третьей главе изучаются инвариантные меры тех сред, неэргодичность которых доказывалась в первых двух главах. Доказывается, что, если среда удовлетворяет условиям (2) и (6):

$$\varphi^1_{min} = \min_{a_{-r}, \ldots, a_r} \varphi^1(a_{-r}, \ldots, a_r) > 0, \tag{6}$$

то все инвариантные меры такой среды, отличные от δ_1, не принадлежат классу W_1 "хороших" мер, включающему как частный случай все конечно - марковские меры.

Кроме того, в третьей главе снова рассматриваются среды Ставской (I). Для них вводится понятие "верхней" меры. Существование верхней меры, отличной от δ_1, эквивалентно неэргодичности. Верхние меры тоже не могут принадлежать W_1 (на них переносится доказательство). Тем не менее указывается класс верхних мер. Доказательство неэргодичности, данное М.Г.Шнирманом [I3] близко к указанию одного семейства верхних мер, но, строго говоря, такого указания не содержит.

Основные результаты диссертации опубликованы в [I0,II,I2].

ГЛАВА I. НЕЭРГОДИЧНОСТЬ В СРЕДАХ СТАВСКОЙ

§ I. Введение

Опишем семейство марковских цепей M_n (n натуральное или заменяется на ∞). Состояние цепи задается набором значений переменных $x_i \in \{0,1\}$, где i пробегает значения:

$i = 1, 2, \ldots, n$ для n натурального

$i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ для $n = \infty$.

Состояние x_i в момент t обозначим x_i^t . Переход от $t-1$ к t для всех цепей определяется однотипно. Пусть в момент $t-1$ цепь была в состоянии $x^{t-1} = \{\ldots, x_i^{t-1}, \ldots\}$. Введем независимые переменные γ_i^t , равные I с вероятностью θ и 0 с вероятностью $1-\theta$. Мера в следующий момент времени индуцируется этим распределением величин γ_i^t при отображении:

$$x_i^t = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{i-1}^{t-1} = x_i^{t-1} = 1 \quad \text{или} \quad \gamma_i^t = 1; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

При $t=0$ задана мера δ_0 - "все нули". Обозначим $P_{r,n}^t(\theta)$ вероятность того, что $x_i^t = \ldots = x_{i+r-1}^t = 1$ в цепи M_n . Легко показать, что $P_{r,n}^t(\theta)$ монотонно возрастает по θ . Для рассматриваемых начальных условий в [9] доказано, что существует предел

$$\lim_{t\to\infty} P_{r,\infty}^t(\theta) = P_{r,\infty}^{\infty}(\theta).$$

Из полученных в [9] нижних оценок для вероятностей $P^t_{r,n}(\theta)$ следует, что при достаточно большом θ (например, $\theta \geq 0{,}37$):

а) при $n=\infty$ $P^{\infty}_{r,\infty}=1$ для всех r (мера сходится к δ_1); в таком случае среда эргодична;

б) при n натуральном математическое ожидание $T_n(\theta)$ того момента времени t, когда впервые $x_1^t=\ldots=x_n^t=1$, не превышает $const\cdot\log n$ (константа зависит от θ).

На основании моделирования этих сред на ЦВМ О.Н.Ставская и И.И.Пятецкий-Шапиро [9] сформулировали гипотезу, что утверждения (а,б) выполняются лишь для значений $\theta>\theta_0>0$ $(\theta_0\approx 0{,}3)$, а при $\theta<\theta_0$ выполняются неравенства:

в) при $n=\infty$ $P^{\infty}_{r,\infty}(\theta)<1$ для всех r; в таком случае среда неэргодична;

г) при n натуральном $T_n(\theta)\geq c^n$ $(c=c(\theta)>1)$.

М.Г.Шнирман [13] доказал существование $\theta>0$, для которых выполняется (в) (оценка для θ в работе не приведена). Мы здесь получим верхние оценки для вероятностей $P^t_{r,n}(\theta)$, из которых следуют утверждения (в,г) для достаточно малых θ (например, $\theta\leq 0{,}09$).

В частности, утверждение (в) доказывается для $\theta<\frac{1}{c}$, где константа c имеет простой геометрический смысл:

$$c=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{N^k}, \qquad (7)$$

где N^k - это число способов, которыми на рис.1 можно пройти от T_1T_1 к T_2T_2, идя только в направлении стрелок, не проходя ни через одну более одного раза и сделав k шагов вправо, причем шаги влево вверх и влево вниз не могут следовать друг за другом.

Решающую роль в этих доказательствах играет интерпретация вероятностей $P^{t}_{r,n}(\theta)$ как вероятностей того, что проводят некоторые контактные схемы из ненадежных элементов, похожие на те, что рассматривались в [7]. В частности, $P^{t}_{r;\infty}(\theta)$ равно вероятности того, что схема, задаваемая рис.I, но не бесконечная, а обрезанная на расстоянии t от вершины, проводит от T_1T_1 к T_2T_2, если: горизонтальные ребра проводят вправо – в направлении стрелок с вероятностью θ, а влево – никогда; наклонные ребра проводят в направлении стрелок всегда, а в противоположном – никогда.

§ 2. О контактных схемах

Как и в [7], под контактной схемой понимается граф, ребра которого могут проводить ток. Мы, однако, допускаем, что ребро может в одном направлении проводить, а в другом – не проводить. По определению, схема проводит от полюса M к полюсу N, если существует проводящий путь от M к N, т.е. последовательность ребер $MA_1, A_1A_2, \ldots, A_nN$, причем MA_1 проводит от M к A_1, A_1A_2 проводит от A_1 к A_2 и т.д.

Схема называется плоской, если ее граф плоский. Для плоской схемы S естественно определяется двойственная схема $\overline{S}$. Ее граф – двойственный к графу схемы S. Пусть ребро KL схемы $\overline{S}$, соответствует ребру АВ схемы S, где K – левая, L – правая области, прилегающие к ребру AB, если идти от A к B. Пусть всякое такое ребро KL проводит от K к L тогда и только тогда, если AB не проводит от A к B, и проводит от L к K, если AB не проводит от B к A. Тогда

к стр. 9

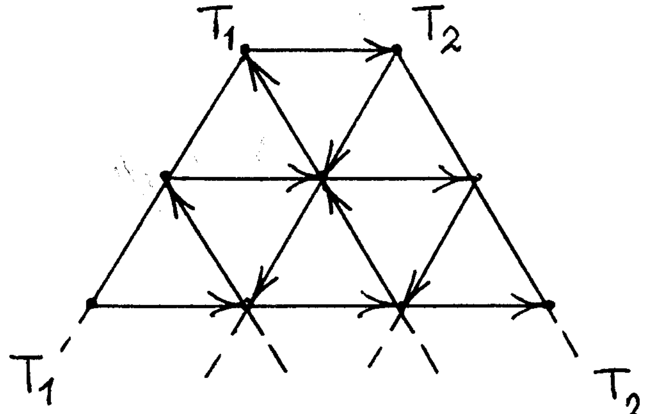

рис. 1

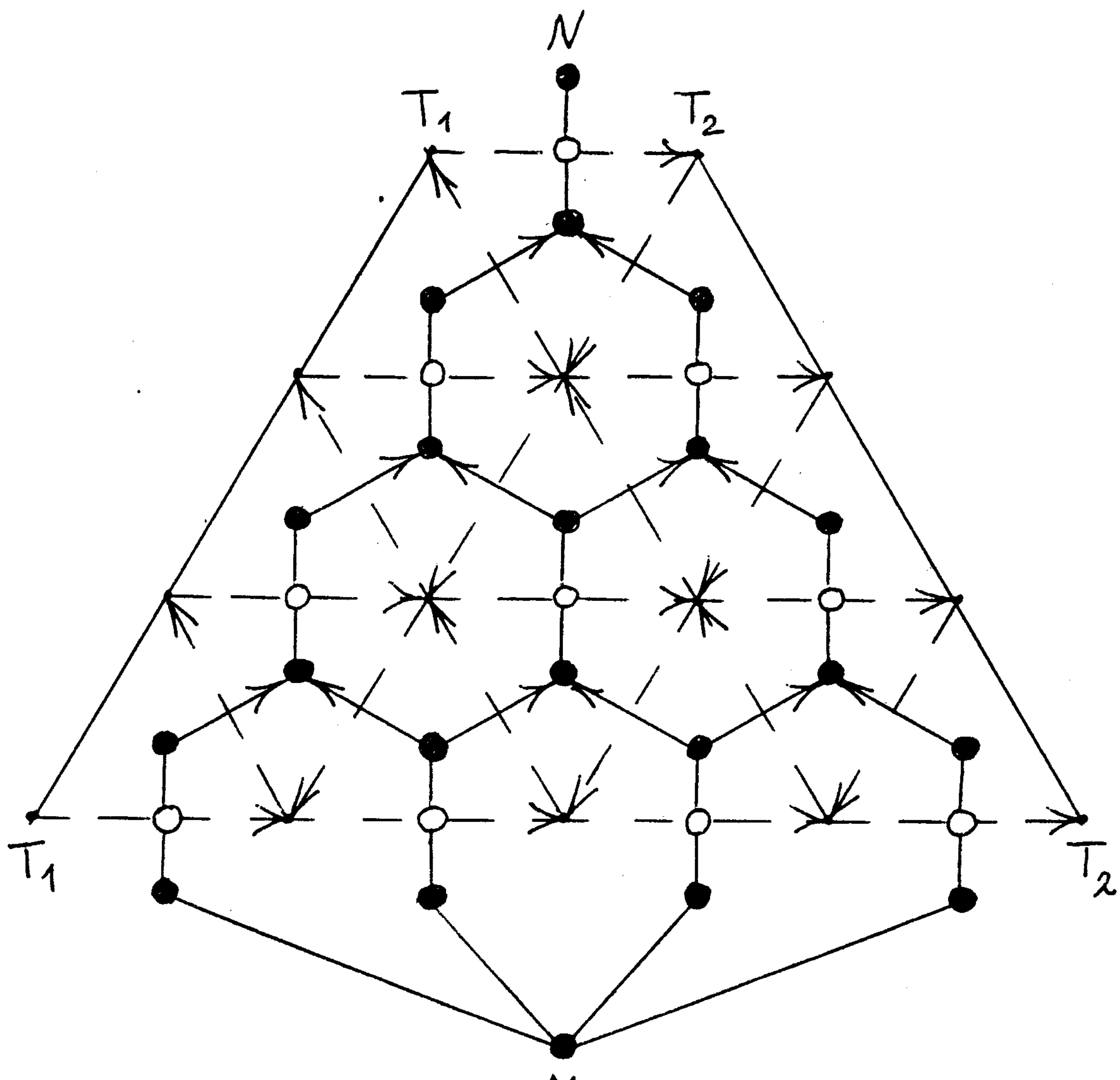

рис. 2

схема S не проводит от A к B тогда и только тогда, если в схеме $\bar{S}$ есть замкнутый проводящий путь $K_1 K_2 \dots K_n$ (т.е. $K_1 K_2$ проводит от K_1 к K_2 и т.п.) отделяющий M от N и обходящий M по часовой стрелке.

§ 3. Оценка $P^t_{1,\infty}(\theta)$

Очевидно, x^t_i представляет собой детерминированную функцию от y^u_j, $i-t+u \le j \le i$. На рис.2 для случая $t=4$ все такие точки (j,u) обозначены кружками. Зависимость x^t_i от всех этих y^u_j можно выразить так: $x^t_i=0$ тогда и только тогда, если из точки (i,t) можно дойти до самого низа, идя вниз только по точкам, занятым нулями. Это наглядное представление было замечено сразу после написания статьи [9]. Например, Л.Г.Митюшин при его помощи показал, что вероятность $P^t_{1,\infty}(\theta)$ в точности равна вероятности того, что в цепи M_∞ в момент t все x^t_i равны 1, если в момент $t=0$ одна из них была равна нулю, а остальные единице.

Теперь построим плоскую схему $S^t_{1,\infty}$, которая проводит от M к N тогда и только тогда, если $x^t_i=0$. Схема $S^4_{1,\infty}$ изображена на рис.2 сплошными линиями.

Её вершины - черные точки. Она построена следующим образом. Через каждую точку (j,u) проведено вертикальное ребро A^u_j, которое проводит вверх, если $y^u_j=0$.

Нижний конец ребра A^u_j при $u>1$ соединен наклонными ребрами с верхними концами ребер A^{u-1}_{j-1} и A^{u-1}_j. Эти наклонные ребра всегда проводят вверх, т.е. в направлении стрелок, и никогда в обратном. За полюс N взят верхний конец ребра A_i^t. Полюс M соединен с нижними концами ребер A_j^o ребрами, всегда проводящими вверх, т.е. от M к этим концам. Проводимость этих ребер и ребер A_j^u вниз несущественна. Нам будет удобно считать, что эти ребра проводят вниз всегда.

Теперь построим схему $\bar{S}_{1,\infty}^t$, двойственную к $S_{1,\infty}^t$. Она изображена на рис.2 пунктиром. Ребра, образующие линии T_1T_1 и T_2T_2 проводят всегда в обе стороны и соединены между собой проводящим всегда ребром, которое не нарисовано. Остальные ребра однозначно соответствуют ребрам схемы $S_{1,\infty}^t$ (кроме ребер, выходящих из M) наклонные - наклонным, горизонтальные - вертикальным. Очевидно, наклонные всегда проводят в направлении стрелок и никогда - в обратном. Горизонтальные ребра $\bar{A}_j^u$, соответствующие A_j^u, проводят вправо с вероятностью θ, а влево - никогда. Будем считать, что ненарисованного ребра, соединяющего T_1T_1 и T_2T_2 нет.

Вероятность того, что оставшаяся пунктирная схема проводит от T_1T_1 к T_2T_2, равна $P_{1,\infty}^t(\theta)$. Оценим её сверху. Эта вероятность меньше, чем сумма вероятностей всех событий вида: "на данном пути от T_1T_1 к T_2T_2 все рёбра проводят". Вероятность такого события равна θ^k, где k -число горизонтальных рёбер в этом пути. Можно иметь в виду только пути, не проходящие ни через одну вершину более одного раза, и в которых не идут подряд наклонные рёбра разных направлений. Число таких путей, содержащих k горизонтальных рёбер, в точности совпадает с N^k в формуле (7). Итак:

$$P_{1,\infty}^t(\theta) < \sum_{k=1}^{\infty} N^k \theta^k \tag{8}$$

N^k легко оценить сверху числом 3^{3k}, если закодировать каждый путь последовательностью цифр 1,2,3, где цифра 1 означает ребро, идущее влево вниз, 2 – вправо, 3 – влево вверх. Тогда при $\theta < 1/54$ сумма (8) меньше единицы. Итак, утверждение (в) доказано для $\theta < 1/54$.

Оценку N^k можно несколько улучшить, если заметить, что в последовательности, кодирующей путь, цифры 1 и 3 не могут стоять рядом. Тогда получим $\frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{2}(5\sqrt{5}-11) \approx 0{,}09$. Аналогично можно учесть еще какие-нибудь запреты, например тот факт, что последовательности, кодирующие пути, не могут содержать комбинаций 321 и 123 и т.д.

§ 4. Другие оценки

Построим схему $S^t_{r,\infty}$, которая проводит от M к N тогда и только тогда, если хотя бы одна из переменных $x^t_i, \ldots, x^t_{i+r-1}$ равна нулю. Для этого надо взять схему $S^{t+r-1}_{1,\infty}$ и отсечь от неё все рёбра A^u_j при $u>t$ с соединяющими их наклонными, а верхние концы рёбер A^t_j соединить с вершиной N. Теперь все пути от $T_1 T_1$ к $T_2 T_2$ содержат не меньше r горизонтальных рёбер. Поэтому вероятность $P^t_{r,\infty}(\theta)$, равная вероятности того, что двойственная схема проводит, оценивается так:

$$P^t_{r,\infty}(\theta) \leq \sum_{k=r}^{\infty} N^k \theta^k \leq const \cdot \sum_{k=r}^{\infty} \left[(c+\varepsilon)\theta\right]^k = const \frac{\left[(c+\varepsilon)\theta\right]^r}{1-(c+\varepsilon)\theta},$$

где c имеет смысл, определенный в (7), а ε – любое положительное число. Для любого $\theta < 1/c$ найдутся такие r, ε, что это выражение меньше единицы. Тем самым, неэргодичность для всех $\theta < 1/c$ доказана.

Для случая натурального n легко построить аналогичные схемы $S^t_{r,n}$ и двойственные к ним. Ограничимся случаем $r = n$. Легко получить оценку для $\theta < 1/27$:

$$P^t_{r,n}(\theta) < t \sum_{k=0}^{\infty} \theta^{n+k} 3^{n+3k} = t \frac{(3\theta)^n}{1-27\theta}.$$

Отсюда математическое ожидание $T_n(\theta)$ того момента, когда впервые $x^t_1 = \ldots = x^t_n = 1$, не меньше $(1-27\theta)/(3\theta)^n$.

Учитывая запреты, эту оценку можно улучшить как и в случае $n = \infty$.

ГЛАВА П. НЕЭРГОДИЧНОСТЬ В ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ

§ I. Введение

Основной результат этой главы состоит в доказательстве неэргодичности определенного класса однородных случайных сред. Опишем этот класс. Пусть автоматы $\mathfrak{X}_i$ "спонтанно-активны". Это значит, что функции φ^0, φ^1 имеют вид:

$$\varphi^0=(1-\theta)\psi^0,\ \varphi^1=\theta+(1-\theta)\psi^1,\ \psi^0,\psi^1\geq 0,\quad 0\leq\theta<1. \tag{9}$$

Тогда $V_\varphi=V_\psi S_\theta$, где S_θ – оператор, действие которого заключается в независимой замене всех нулей на единицы с вероятностью θ.

Пусть

$$\psi^0(0,\dots,0)=\psi^1(1,\dots,1)=1. \tag{3}$$

Наряду с $\varphi_\tau^{0,1}$ и $\psi_\tau^{0,1}$ введём ещё $\chi_\chi^{0,1}$, где функция χ^1 определяется равенством: $(\chi^0+\chi^1\equiv 1)$

$$\chi^1(a_{-r},\dots,a_r)=\begin{cases}[\psi^1(a_{-r},\dots,a_r)]^{\frac{1}{2}}, & \text{если } a_{-r}=a_r=0;\\ \psi^1(a_{-r},\dots,a_r) & \text{иначе.}\end{cases}$$

Обозначим

$$\chi^0(0,\dots,0,1)=s_1^{\Lambda},$$

$$\min_{a_1}\chi^0(0,\dots,0,1)\chi^0(0,\dots,0,1,a_1)=s_2^{\Lambda},$$

$$\min_{a_1,\dots,a_k}\chi^0(0,\dots,0,1)\dots\chi^0(0,\dots,0,1,a_1,\dots,a_k)=s_{k+1}^{\Lambda},$$

$$\min_{a_1,\dots,a_{2r-1}}\chi^0(0,\dots,0,1)\dots\chi^0(0,1,a_1,\dots,a_{2r-1})=s_{2r}^{\Lambda};$$

$$\chi^{\circ}(1,0,\dots,0)=s_1^{п},$$

$$\min_{a_1}\ \chi^{\circ}(1,0,\dots,0)\,\chi^{\circ}(a_1,1,0,\dots,0)=s_2^{п},$$

$$\cdots$$

$$\min_{a_1,\dots,a_k}\ \chi^{\circ}(1,0,\dots,0)\dots\chi^{\circ}(a_1,\dots,a_k,1,0,\dots,0)=s_{k+1}^{п},$$

$$\cdots$$

$$\min_{a_1,\dots,a_{2r-1}}\ \chi^{\circ}(1,0,\dots,0)\dots\chi^{\circ}(a_1,\dots,a_{2r-1},1,0)=s_{2r}^{п}.$$

(л – левые, п – правые), и затем:

$$\left.\begin{array}{ll} 1-s_1^{л}=d_r^{л}, & 1-s_1^{п}=d_r^{п}, \\ s_1^{л}-s_2^{л}=d_{r-1}^{л}, & s_1^{п}-s_2^{п}=d_{r-1}^{п}, \\ \cdots & \cdots \\ s_{2r-1}^{л}-s_{2r}^{л}=d_{-r+1}^{л}, & s_{2r-1}^{п}-s_{2r}^{п}=d_{-r+1}^{п}, \\ s_{2r}^{л}=d_{-r}^{л}; & s_{2r}^{п}=d_{-r}^{п}. \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Обозначим

$$\sum_{k=-r}^{r} k\,d_k^{л}=M^{л};\qquad \sum_{k=-r}^{r} k\,d_k^{п}=M^{п}.$$

В этой главе доказывается

<u>Теорема I.</u> Если функция ψ такова, что

$$M^{л}+M^{п}<0, \qquad (11)$$

то найдется такое $\theta_{\psi}^{*}>0$, что при всех $\theta<\theta_{\psi}^{*}$ среда, задаваемая оператором V_{ψ}, неэргодична. Оценка снизу для θ_{ψ}^{*} дается формулой (30).

Теорема применима и к операторам V_{ψ}, не представимым в виде (9) с условием (3). В общем случае следует положить

$$\theta = \varphi^1(0,\dots,0),$$

$$\psi^1(a_{-r},\dots,a_r) = \max\left\{0, \frac{\varphi^1(a_{-r},\dots,a_r)-\theta}{1-\theta}\right\}.$$

Доказательство. Как было сказано во введении, фактически будет доказываться неравенство (4). Оно следует из двух других:

$$\delta_0 (V_\varphi)^t (\underbrace{1,\dots,1}_{s}) \leq \delta_0 (W S_\theta)^t (\underbrace{1,\dots,1}_{s}), \qquad (12)$$

$$\delta_0 (W S_\theta)^t (\underbrace{1,\dots,1}_{s}) \leq c < 1, \qquad (13)$$

где оператор W есть суперпозиция двух: $W = W_1 W_2$. Определим их.

Будем называть массивом единиц (или массивом нулей) максимальное множество идущих подряд единиц (или, соответственно, нулей) в последовательности x. При $0<\theta<1$ все меры $\mu^{(t)}$ при $t>0$, о которых будет идти речь ниже, равны нулю на множестве последовательностей, содержащих бесконечные массивы, и мы исключим их из рассмотрения.

Определение W_1: оператор W_1 переводит δ_x в $\delta_{x'}$, где последовательность x' отличается от x тем, что все нули, составляющие массивы длины не более $2r-1$, заменяются на единицы.

Определим W_2. Пусть каждому полуцелому числу вида $i+\frac{1}{2}$ сопоставлены независимые случайные переменные $\xi_{i+\frac{1}{2}}$, $\eta_{i+\frac{1}{2}}$, принимающие целые значения $-r,\dots,r$ с вероятностями:

$$\xi_{i+\frac{1}{2}} = \xi^0 \quad \text{с вероятностью } d^{\Lambda}_{\xi^0}$$

$$\eta_{i+\frac{1}{2}} = \eta^0 \quad \text{с вероятностью } d^{\Pi}_{\eta^0}.$$

где $-r \le \overset{\circ}{\xi}, \overset{\circ}{\eta} \le r$ и $d^{\Lambda}_{\xi^\circ}, d^{\Pi}_{\eta^\circ}$ определены в (10). Мера $\delta_x W_2$ индуцируется этим распределением при следующем отображении $X \cdot \{\dots, \xi_{i+\frac{1}{2}}, \eta_{i+\frac{1}{2}}, \dots\}$ на X : $y_i = 1$ тогда и только тогда, если найдутся такие k, ℓ, $k \le \ell$, что

$$x_{k-1} = 0, \quad x_k = \dots = x_\ell = 1, \quad x_{\ell+1} = 0,$$

$$k - \xi_{k-\frac{1}{2}} \le i \le \ell + \eta_{\ell+\frac{1}{2}}.$$

Иными словами, каждый массив единиц с концами k, ℓ удлиняется слева на $\xi_{k-\frac{1}{2}}$ и справа на $\eta_{\ell+\frac{1}{2}}$ (фактически укорачивается, если соответствующая переменная $\xi_{k-\frac{1}{2}}$, $\eta_{\ell+\frac{1}{2}}$ отрицательна, и может даже совсем исчезнуть).

§ 2. Доказательство (12)

Применим упорядочение мер и операторов по Митюшину [6] при том же упорядочении X. Достаточно доказать:

а) что оператор WS_θ монотонный; это легко вывести из определений.

б) что $V_\varphi \prec WS_\theta$. Достаточно доказать для любой x :

$$\delta_x V_\psi \prec \delta_x W \qquad (14)$$

Докажем (14). Разрежем последовательность индексов $\dots, -1, 0, 1, \dots$ на куски, причем так, что разрезы проходят только внутри массивов нулей длины не менее $2r$ последовательности x на расстоянии не менее r от каждого конца массива – по одному разрезу на массив. Каждая из мер $\delta_x V_\psi$, $\delta_x W$ представится как произведение мер на этих кусках.

Лемма I. (Н.Б.Васильева). Пусть меры μ и ν имеют вид $\mu = \prod_{j \in A} \mu_j$, $\nu = \prod_{j \in A} \nu_j$ и $\mu_j \prec \nu_j$ при всех $j \in A$. A конечно или счётно. Тогда $\mu < \nu$. Вследствие этого, достаточно доказать, что

$$\{\delta_x V_\psi\}_j < \{\delta_x W\}_j \tag{15}$$

(проекции мер $\delta_x V_\psi$, $\delta_x W$ на j-ый кусок). Пусть k, ℓ – координаты крайней левой и крайней правой единиц в j-ом куске x. Будем до конца этого параграфа, опуская индексы, писать просто ξ и η вместо $\xi_{k-\frac{1}{2}}$, $\eta_{\ell+\frac{1}{2}}$.

Мера $\{\delta_x W\}_j$ индуцируется заданным выше распределением величин ξ, η (назовем его теперь $\pi(\xi^0, \eta^0) = d^{\Lambda}_{\xi^0} \cdot d^{\Pi}_{\eta^0}$) при отображении, которое определяется отображением, использовавшимся при определении W_2. Обозначим это отображение f и определим еще раз: на j-ом куске возникает массив единиц с координатами концов $k-\xi$, $\ell+\eta$ (или не возникает никакого, если $k-\xi > \ell+\eta$). Определим на величинах ξ, η другое распределение ρ. Будем писать ψ_i^a вместо $\psi^a(x_{i-r}, \dots, x_{i+r})$ и χ_i^a вместо $\chi^a(x_{i-r}, \dots, x_{i+r})$.

Обозначим

$$\rho^{\Lambda}_{r} = \psi^1_{k-r}, \qquad \rho^{\Pi}_{r} = \psi^1_{\ell+r},$$

$$\rho^{\Lambda}_{r-1} = \psi^0_{k-r}\psi^1_{k-r+1}, \qquad \rho^{\Pi}_{r-1} = \psi^1_{\ell+r-1}\psi^0_{\ell+r},$$

$$\dots$$

$$\rho^{\Lambda}_{-r+1} = \psi^0_{k-r}\dots\psi^0_{k+r-2}\psi^1_{k+r-1}, \qquad \rho^{\Pi}_{-r+1} = \psi^1_{\ell-r+1}\psi^0_{\ell-r+2}\dots\psi^0_{\ell+r},$$

$$\rho^{\Lambda}_{-r} = \psi^0_{k-r}\dots\psi^0_{k+r-2}\psi^0_{k+r-1}; \qquad \rho^{\Pi}_{-r} = \psi^0_{\ell-r+1}\psi^0_{\ell-r+2}\dots\psi^0_{\ell+r}.$$

Тогда

$$\rho(\xi^\circ,\eta^\circ)=\begin{cases} p^{\Lambda}_{\xi^\circ}\, p^{\Pi}_{\eta^\circ} & \text{при } \xi^\circ+\eta^\circ>k-\ell; \\ \psi^{0}_{k-2}\cdots\psi^{0}_{k-\xi^\circ-1}\psi^{1}_{k-\xi^\circ}\psi^{0}_{k-\xi^\circ+1}\cdots\psi^{0}_{\ell+r} & \text{при } \xi^\circ+\eta^\circ=k-\ell> \\ & >-2r; \\ 0 & \text{при } -2r<\xi^\circ+\eta^\circ<k-\ell; \\ \text{доопределяется из условия стохастичности} & \\ \text{при } \xi^\circ=\eta^\circ=-r. & \end{cases}$$

Если $\ell-k>2r-2$, то значение ρ, даваемое этой формулой, равно $p^{\Lambda}_{\xi^\circ} p^{\Pi}_{\eta^\circ}$ при всех ξ°, η°.

Мера, индуцируемая ρ при отображении f, мажорирует $\{\delta_x V_\psi\}_j$: $\{\delta_x V_\psi\}_j \prec \rho f$,

так как мера ρf индуцируется мерой $\{\delta_x V_\psi\}_j$ при отображении: всякий ноль, принадлежащий не крайнему (слева или справа) массиву или стоящий на месте j, для которого $k+r\le j\le \ell-r$, заменяется единицей. Остается доказать, что

$$\rho f \prec \Pi f. \tag{16}$$

Упорядочим множество допустимых пар (ξ°, η°): $(\xi^\circ,\eta^\circ)\prec(\xi^1,\eta^1)$, если $\xi^\circ\le\xi^1$, $\eta^\circ\le\eta^1$. Очевидно, из $(\xi^\circ,\eta^\circ)\prec(\xi^1,\eta^1)$ следует $f(\xi^\circ,\eta^\circ)\prec f(\xi^1,\eta^1)$. Пользуясь этим, легко вывести (16) из условия $\rho\prec\Pi$, которое и будет доказано. При $\ell-k>2r-2$ это следует из леммы I и тождества, где $a_1,\dots,a_n$ – любые:

$$a_1+(1-a_1)a_2+(1-a_1)(1-a_2)a_3+\dots+ \\ +(1-a_1)\dots(1-a_{n-1})a_n+(1-a_1)\dots(1-a_{n-1})(1-a_n)=1. \tag{17}$$

Пусть $\ell-k\le 2r-2$. Введем три вспомогательных распределения $\rho\Pi$, Π'', Π' и докажем, что

$$\rho\prec\rho\Pi\prec\Pi''\preceq\Pi'\prec\Pi. \tag{18}$$

Обозначим

$$q^{л}_{r} = x^1_{k-r}, \qquad q^{п}_{r} = x^1_{l+r},$$

$$q^{л}_{r-1} = x^0_{k-r}\, x^1_{k-r+1}, \qquad q^{п}_{r-1} = x^1_{l+r-1}\, x^0_{l+r},$$

$$\ldots$$

$$q^{л}_{-r+1} = x^0_{k-r} \cdots x^0_{k+r-2}\, x^1_{k+r-1}, \qquad q^{п}_{-r+1} = x^1_{l-r+1}\, x^0_{l-r+2} \cdots x^0_{l+r},$$

$$q^{л}_{-r} = x^0_{k-r} \cdots x^0_{k+r-2}\, x^0_{k+r-1}; \qquad q^{п}_{-r} = x^0_{l-r+1}\, x^0_{l-r+2} \cdots x^0_{l+r}.$$

Тогда

$$\pi'(\xi^0, \eta^0) = q^{л}_{\xi^0} \cdot q^{п}_{\eta^0};$$

$$\pi''(\xi^0, \eta^0) = \begin{cases} q^{л}_{\xi^0} \cdot q^{п}_{\eta^0} & \text{при } \xi^0 + \eta^0 \geq k - l; \\ 0 & \text{при } -2r < \xi^0 + \eta^0 < k - l; \\ \text{доопределяется из условия стохастичности} & \\ \text{при } \xi^0 = \eta^0 = -r. & \end{cases}$$

$$\rho\pi(\xi^0, \eta^0) = \begin{cases} \rho^{л}_{\xi^0} \cdot q^{п}_{\eta^0} & \text{при } \xi^0 + \eta^0 > k - l; \\ \psi^0_{k-r} \cdots \psi^0_{k-\xi^0+1}\, \psi^1_{k-\xi^0}\, x^0_{k-\xi^0+1} \cdots x^0_{l+r} & \text{при } \xi^0 + \eta^0 = k - l \\ 0 \text{ при } -2r < \xi^0 + \eta^0 < k - l; & \\ \text{доопределяется из условия стохастичности} & \\ \text{при } \xi^0 = \eta^0 = -r. & \end{cases}$$

Докажем (18).

а) $\rho \prec \rho\pi$. Пусть a – полное сверху подмножество допустимых пар (ξ^0, η^0), не содержащее $(-r, -r)$. Надо доказать, что $\sum_a \rho \leq \sum_a \rho\pi$. Разобьем a в объединение множеств a_m, в каждом из которых ξ^0 постоянно и равно m: $a = \bigcup_{m=-r}^{r} a_m$, где из $(\xi^0, \eta^0) \in a_m$ следует $\xi^0 = m$. Тогда $\sum_{a_m} (\rho\pi - \rho) \geq 0$

при всех m. Чтобы доказать это, надо выписать эту сумму, вынести за скобки p_m^{λ} и использовать (17).

б) $\rho\Pi \prec \Pi''$. На этот раз полное сверху a, не содержащее $(-\tau, \tau)$, представляется как $a = \bigcup_{m=-\tau}^{\tau} a^m$, где из $(\xi^\circ, \eta^\circ) \in a^m$ следует $\eta = m$. Тогда $\sum_{a^m} (\Pi'' - \rho\Pi) \geq 0$; чтобы доказать это, надо вынести за скобки $q_m^{\eta^\circ}$ и применить (17). (Если точка (ξ°, η°), для которой $\xi^\circ + \eta^\circ = k - \ell$, входит в a^m, то в значении $\rho\Pi$ в этой точке надо заменить ψ_i^1 на χ_i^1 при $\xi = -\tau$ и на $(\chi_i^1)^2$ при $\xi, \eta > -\tau$).

в) $\Pi'' \prec \Pi'$ очевидно;

г) $\Pi' \prec \Pi$ следует из леммы I.

§ 3. Доказательство (13).

Представим оператор S_θ через меры $\delta_x S_\theta$ для всех x. Пусть переменные $\dots, \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, \dots$ независимы и равны I с вероятностью θ и 0 с вероятностью $1-\theta$. Тогда мера $\delta_x S_\theta$ индуцируется этой мерой при отображении $X \cdot \{\dots, \gamma_i, \dots\}$ на X: $y_i = \max\{x_i, \gamma_i\}$. Обозначим через x^t реализацию меры $\delta_0 (W S_\theta)^t$ и через $\xi_{i+\frac{1}{2}}^{t-1}, \eta_{i+\frac{1}{2}}^{t-1}, \gamma_i^t$ переменные, участвующие в t-ом применении оператора $W S_\theta$. Если они фиксированы при всех $t \leq t_0$, то и все $x_i^{t_0}$ принимают определенные значения. Иначе говоря, $x_i^{t_0}$ – детерминированная функция от $\xi_{j+\frac{1}{2}}^{t-1}$, $\eta_{j+\frac{1}{2}}^{t-1}$, γ_j^t, $t \leq t_0$, $|j|$ ограничен. Доказательство (13) основано на том, что множество тех значений $\xi_{i+\frac{1}{2}}^{t-1}$, $\eta_{i+\frac{1}{2}}^{t-1}$, γ_i^t, $t \leq t_0$, при которых

$$x_0^{t_0} = \dots = x_\lambda^{t_0} = 1, \tag{19}$$

с точностью до множества меры нуль представляется как объединение счетной совокупности цилиндрических множеств, и вероятность (19) оценивается сверху суммой их мер.

Пусть (19) выполняется. Вероятность того, что массив единиц в x^{t_0}, содержащий $x_0^{t_0},\dots,x_s^{t_0}$, бесконечен, равна нулю. Пусть он конечен:

$$x_{k-1}^{t_0}=0,\quad x_k^{t_0}=\dots=x_\ell^{t_0}=1,\quad x_{\ell+1}^{t_0}=0,\quad k\le 0,\quad \ell\ge s.$$

Образуем двумерное множество $\mathcal{D}$ точек вида (i,t) по следующим правилам:

а) $(k,t_0),\dots,(\ell,t_0)\in\mathcal{D}$;

б) если $(i,t)\in\mathcal{D}$, $x_j^{t-1}=1$, $|j-i|\le r$, то $x_j^{t-1}\in\mathcal{D}$;

в) никакие (i,t), кроме задаваемых правилами (а,б), не входят в $\mathcal{D}$.

Составим конечную ломаную с вершинами $(i_1+\frac{1}{2},\ t_1)$, ..., $(i_n+\frac{1}{2},\ t_n)$, "окаймляющую" $\mathcal{D}$. Все её звенья направлены:

$$\left(i_k+\tfrac{1}{2},\ t_k\right)\to\left(i_{k+1}+\tfrac{1}{2},\ t_{k+1}\right),\quad k=1,\dots,n-1.$$

Пусть $t_{\mathcal{D}}$ - наименьшее значение t для точек $(i,t)\in\mathcal{D}$. Будем строить нашу ломаную индуктивно, продвигаясь по t от $t_{\mathcal{D}}$ к t_0. Сначала включим в неё все звенья вида $(i-\frac{1}{2},\ t_{\mathcal{D}})\to(i+\frac{1}{2},\ t_{\mathcal{D}})$, где $(i,t_{\mathcal{D}})\in\mathcal{D}$. Припишем этим звеньям тип $m=2$. Заметим, что для всех них $\gamma_i^{t_{\mathcal{D}}}=1$. Дальше будем строить ломаную, последовательно принимая во внимание реализации

$$\dots,\ x^t,\ \xi_{i+\frac{1}{2}}^t,\ \eta_{i+\frac{1}{2}}^t,\ \gamma_i^{t+1},\ x^{t+1},\dots$$

Пусть мы уже приняли во внимание x^t. Построенных кусков ломаной столько, сколько массивов единиц в подмножестве - "слое" точек из $\mathcal{D}$ с данной координатой t. Начало и конец каждого куска "окаймляют" соответствующий ему массив, то есть имеют координаты $(i-\frac{1}{2}, t)$, $(j+\frac{1}{2}, t)$, где (i,t), (j,t) – концы массива. Реализация $x^t w_1$ отличается от x^t тем, что некоторые промежутки между массивами единиц заполняются единицами. Пусть левый конец промежутка – i, правый – j. Тогда точки $(i-\frac{1}{2}, t)$ и $(j+\frac{1}{2}, t)$ – конец и начало двух уже построенных кусков ломаной соединяются звеном $(i-\frac{1}{2}, t) \to (j+\frac{1}{2}, t)$. Припишем такому звену тип $m=3$. Затем принимаются во внимание переменные $\xi^t_{i+\frac{1}{2}}$, $\eta^t_{i+\frac{1}{2}}$. К каждому началу $(i+\frac{1}{2}, t)$ некоторого куска присоединяется звено

$$(i+\tfrac{1}{2}-\xi^t_{i+\frac{1}{2}}, t+1) \to (i+\tfrac{1}{2}, t)$$

типа $m=1$, а к каждому концу $(i+\frac{1}{2}, t)$ куска присоединяется звено

$$(i+\tfrac{1}{2}, t) \to (i+\tfrac{1}{2}+\eta^t_{i+\frac{1}{2}}, t+1)$$

типа $m=4$. Затем принимаются во внимание переменные γ^{t+1}_i. Для каждой точки $(i, t+1) \in \mathcal{D}$, для которой $x_i = 0$ в реализации $x^t w$, вводится звено вида $(i-\frac{1}{2}, t+1) \to (i+\frac{1}{2}, t+1)$ с типом $m=2$. Переход от t к $t+1$ закончен.

Начало и конец полученной в результате ломаной имеют координаты $(k-\frac{1}{2}, t_0)$, $(\ell+\frac{1}{2}, t_0)$.

Заметим, что упорядоченные сочетания типов звеньев 13, 14, 33, 34, 41 в построенной ломаной невозможны.

Итак, всякую реализацию всех $\xi^{t-1}_{i+\frac{1}{2}}$, $\eta^{t-1}_{i+\frac{1}{2}}$, γ^t_i, $t \le t_0$, для которой выполняется (16), за исключением множества меры нуль, мы включили в цилиндрическое множество: оно получается фиксацией всех тех $\xi^t_{i+\frac{1}{2}}$, $\eta^t_{i+\frac{1}{2}}$, γ^t_i, которые участвовали в построении ломаной, причем, так, чтобы получилась именно такая ломаная.

Назовем правильной всякую конечную ломаную вида

$$\left(i_1+\tfrac{1}{2},\ t_1\right),\dots,\left(i_n+\tfrac{1}{2},\ t_n\right), \tag{20}$$

удовлетворяющую следующим требованиям:

а) $t_1 = t_0$; $i_1 < 0$;

б) каждому звену ломаной приписан тип m_k=1,2,3,4 $(k=1,\dots,n-1)$, причем:

если $m_k=1$, то $t_{k+1}-t_k=-1$, $i_{k+1}-i_k\in\{-r,\dots,r\}$;

если $m_k=2$, то $t_{k+1}-t_k=0$, $i_{k+1}-i_k=1$;

если $m_k=3$, то $t_{k+1}-t_k=0$, $i_{k+1}-i_k\in\{1,\dots,2r\}$;

если $m_k=4$, то $t_{k+1}-t_k=1$, $i_{k+1}-i_k\in\{-r,\dots,r\}$;

в) запрещены упорядоченные сочетания типов звеньев 13, 14, 33, 34, 41;

г) первое звено имеет тип 1 или 2.

Припишем всякой правильной ломаной (20) вес, равный

$\prod_{k=1}^{n-1}\tau_k$, где

$$\tau_k=\begin{cases} d^{\Lambda}_{i_{k+1}-i_k}, & \text{если } m_k=1;\\ \Theta, & \text{если } m_k=2;\\ 1, & \text{если } m_k=3;\\ d^{\Pi}_{i_{k+1}-i_k}, & \text{если } m_k=4.\end{cases}$$

Ломаная, окаймляющая $\mathcal{D}$, является правильной. Её вес равен мере того цилиндрического множества, в которое мы включили данную реализацию.

Определим функции $\delta^n_m\left(i+\frac{1}{2},t\right)$, m =1,2,3,4, n =0,1,2,...

$\sigma_m^n(i+\frac{1}{2},t)$ равно сумме весов всех правильных ломаных (20), в которых $t_n=t$, $i_n=i$, $m_{n-1}=m$. Мы доказали, что

$$\delta_0(WS_\theta)^{t_0}(x_0=\ldots=x_5=1)\leq\sum_{m=1}^{4}\sum_{i=3}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_m^n(i+\frac{1}{2},t_0). \qquad (21)$$

Величины $\sigma_m^n(i+\frac{1}{2},t)$ удовлетворяют при $n>1$ рекуррентным соотношениям:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1^n(i+\tfrac{1}{2},t)&=\sum_{m=1,2,3}\sum_{k=-2}^{2}\sigma_m^{n-1}(i+\tfrac{1}{2}+k,t+1)\,d_{-k}^{\Lambda}\\
\sigma_2^n(i+\tfrac{1}{2},t)&=\sum_{m=1,2,3,4}\sigma_m^{n-1}(i-\tfrac{1}{2},t)\,\theta\\
\sigma_3^n(i+\tfrac{1}{2},t)&=\sum_{m=2,4}\sum_{k=-2}^{-1}\sigma_m^{n-1}(i+\tfrac{1}{2}+k,t)\\
\sigma_4^n(i+\tfrac{1}{2},t)&=\sum_{m=2,4}\sum_{k=-2}^{2}\sigma_m^{n-1}(i+\tfrac{1}{2}+k,t-1)\,d_{-k}^{\Pi}
\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

которые выполняются при $n>0$, если положить по определению при $n=0$:

$$\sigma_m^0(i+\tfrac{1}{2},t)=\begin{cases}1, & \text{если } t=t_0,\ i<0,\ m=1;\\ 0 & \text{иначе}.\end{cases}$$

Индукцией по n, пользуясь (22), легко доказать, что сходятся ряды

$$\Sigma_m^n=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{t=-\infty}^{\infty}\sigma_m^n(i+\tfrac{1}{2},t)\,\alpha^i\beta^{t-t_0}, \qquad (23)$$

где α, β - константы, $\alpha>1$, $\beta>0$. Их суммы удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma_1^n&=\beta^{-1}A\left(\Sigma_1^{n-1}+\Sigma_2^{n-1}+\Sigma_3^{n-1}\right),\\
\Sigma_2^n&=\theta\alpha\left(\Sigma_1^{n-1}+\Sigma_2^{n-1}+\Sigma_3^{n-1}+\Sigma_4^{n-1}\right),\\
\Sigma_3^n&=C\left(\Sigma_2^{n-1}+\Sigma_4^{n-1}\right),\\
\Sigma_4^n&=\beta B\left(\Sigma_2^{n-1}+\Sigma_4^{n-1}\right),
\end{aligned}\right\}. \qquad (24)$$

где

$$A = d_{-r}^{\Lambda}\, \alpha^{-r} + \ldots + d_{r}^{\Lambda}\, \alpha^{r},$$

$$B = d_{-r}^{\Pi}\, \alpha^{-r} + \ldots + d_{r}^{\Pi}\, \alpha^{r},$$

$$C = \alpha + \ldots + \alpha^{2r}.$$

Заметим, что

$$\sum_{i=s}^{\infty} \sigma_m^n \left(i + \tfrac{1}{2}\, t_0\right) \leq \alpha^{-s} \Sigma_m^n,$$

и поэтому, учитывая (2I),

$$\delta_0 \left(W S_\theta\right)^{t_0} \left(x_0 = \ldots = x_s = 1\right) \leq \alpha^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{4} \Sigma_m^n . \qquad (25)$$

Обозначим μ матрицу преобразования (24):

$$\mu = \begin{pmatrix} \beta^{-1}A & \theta\alpha & 0 & 0 \\ \beta^{-1}A & \theta\alpha & C & \beta B \\ \beta^{-1}A & \theta\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \theta\alpha & C & \beta B \end{pmatrix}$$

Пользуясь теоремой Фробениуса [3], легко доказать, что условие

$$\left| E - \mu \right| > 0 \qquad (26)$$

достаточно для того, чтобы ряд в правой части (25) сходился. Вычислив определитель, преобразуем (26) к виду:

$$\left(1 - \beta^{-1}A\right)\left(1 - \beta B\right) - \theta\alpha\left(1 + C - AB\right) > 0 . \qquad (27)$$

Поскольку коэффициент при θ положителен при всех $\alpha > 1$, то это неравенство выполняется при

$$\Theta < \frac{(1-\beta^{-1}A)(1-\beta B)}{\alpha(1+C-AB)} . \tag{28}$$

Пусть $\beta=\sqrt{A/B}$. Тогда (28) примет вид:

$$\Theta < \frac{(1-\sqrt{AB})^2}{\alpha(1+C-AB)} . \tag{29}$$

Заметим, что при $\alpha = 1$

$$AB = 1, \quad (AB)'_\alpha = M^{\Lambda} + M^{\Pi} < 0.$$

Поэтому найдется $\alpha>1$, при котором правая часть (29) положительна. Пусть $\alpha>1$ и (29) выполняется. Тогда сумма в правой части (25) конечна, и при достаточно большом s правая часть (25) меньше единицы. Доказательство окончено. Таким образом,

$$\Theta^*_\psi \geq \sup_{\alpha>1} \frac{(1-\sqrt{AB})^2}{\alpha(1+C-AB)} . \tag{30}$$

ГЛАВА III. ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МЕРАХ В НЕЭРГОДИЧНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ

§ I. Введение

В этой главе изучаются инвариантные меры неэргодичных однородных случайных сред. В § 2 доказывается

Теорема 2. Никакая мера на X, отличная от δ_1 и инвариантная для однородной случайной среды, удовлетворяющей условиям (2,6) не принадлежит W_1.

Определим класс "хороших" мер W_1. Пусть $\mathcal{Y}$ – множество бесконечных в обе стороны последовательностей y:

$y = \ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots$, где $y_i \in m_y$.

$m_y = m_y^0 \cup m_y^1$, $m_y^0 = \{0_1, \ldots, 0_\alpha, \ldots\}$, $m_y^1 = \{1_1, \ldots, 1_\beta, \ldots\}$,

α, β пробегают конечные или счетные множества. Определим отображение $f: \mathcal{Y} \to X$:

$$f(y) = x, \quad \text{где} \quad x_i = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y_i \in m_y^0 \\ 1, & \text{если} \quad y_i \in m_y^1. \end{cases}$$

Класс W_1 состоит из всех мер μ на X, каждая из которых представима как индуцированная при отображении f некоторой однородной мерой ν на $\mathcal{Y}$: $\mu = \nu f$, причем m_y^1 конечно: $m_y^1 = \{1_1, \ldots, 1_m\}$ и мера ν "марковская по каждому 1_α", то есть для любого α:

$$\nu(A 1_\alpha B) \cdot \nu(1_\alpha) \equiv \nu(A 1_\alpha) \cdot \nu(1_\alpha B),$$

где A, B – любые комбинации символов из m_y.

Подмножеством W_1 является класс W всех мер μ на X, представимых как $\mu = \nu f$, причем m_y конечно, и мера марковская (т.е. марковская по каждому элементу m_y). Подмножеством W является класс всех конечно-марковских мер на X. Классы W и W_1 инвариантны относительно всех операторов V_φ, а класс конечно-марковских мер неинвариантен.

В § 3 снова рассматриваются среды Ставской (I). В главе I доказано существование инвариантной меры $\mu_{\text{инв.}}$ для некоторых $\theta > 0$. (Л.Н.Васерштейн и А.М.Леонтович [I] доказали её единственность, конечно, при условии $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{инв}(\underbrace{1,\dots,1}_{n}) = 0$). По теореме 2, $\mu_{\text{инв.}} \notin W_1$. Назовем меру $\mu_в$ верхней, если при всех $i_1, i_2, \dots, i_p$, $p = 1, 2, \dots$

$$(\mu_в - \mu_в V_{\varphi_c})(x_{i_1} = \dots = x_{i_p} = 1) \geqslant 0, \tag{31}$$

где V_{φ_c} - оператор среды (I). Доказательство теоремы 2 буквально переносится и на верхние меры: все они не принадлежат W_1. Существование $\mu_в \neq \delta_1$ эквивалентно неэргодичности среды, и для всех $i_1, \dots, i_p$

$$(\mu_в - \mu_{инв})(x_{i_1} = \dots = x_{i_p} = 1) \geqslant 0$$

(см. равенства (2) в [9]).

Будем искать верхние меры среди простейшего класса мер, не принадлежащих W_1: а именно, среди мер, представимых как $\mu = \nu f$, причем m_y^0 состоит из одного элемента и мера ν марковская по этому элементу. Можно считать, что $m_y = \{0;\ 1_1, 1_2, \dots\}$, мера ν марковская и определяется условными вероятностями вида $\nu(a,b)/\nu(a) \equiv \nu(a \to b)$:

$$\left.\begin{aligned} &\nu(0 \to 1_1) = k_1; \qquad \nu(1_n \to 1_{n+1}) = k_{n+1}; \\ &\nu(0 \to 0) = 1 - k_1; \qquad \nu(1_n \to 0) = 1 - k_{n+1}; \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Прочие вероятности такого вида равны нулю. Необходимо, чтобы

$$1 + k_1 + k_1 k_2 + k_1 k_2 k_3 + \dots < \infty .$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \nu(0) &= 1/1+k_1+k_1k_2+k_1k_2k_3+\ldots \\ \nu(1_n) &= \nu(0)\cdot k_1\ldots k_n . \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Пусть при всех n

$$0<k_{min}\leqslant k_n\leqslant k_{max}<1 . \qquad (34)$$

В § 3 доказывается

Теорема 3. Для того, чтобы мера $\mu=\nu f$, где ν определена в (32,33) при условии (34), была верхней для среды (I) при некотором $\Theta>0$, необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое $c>0$, что при всех $n=1,2,\ldots$

$$\rho_n\geqslant c\sum_{j=0}^{n}\rho_j\rho_{n-j} ,\ \text{где}\ \rho_0=1,\ \rho_1=k_1,\ldots,\ \rho_n=k_1\ldots k_n,\ldots \qquad (35)$$

Иначе говоря, при некотором $c>0$ должны быть неотрицательны все коэффициенты ряда $S-cS^2$, где

$$S=\rho_0+\rho_1x+\rho_2x^2+\rho_3x^3+\ldots \qquad (36)$$

В § 4, дополнительном к § 3, доказывается, что, если положительная ограниченная последовательность $\rho_0,\rho_1,\rho_2,\ldots$ удовлетворяет условию (35), то она имеет вид $\rho_n=d_n\varkappa^n$,где $0<\varkappa\leqslant 1$, а ряд $\sum d_n x^n$ имеет радиус сходимости I и сходится в точке I. Хотя обратное, вообще говоря, неверно, это представление позволяет легко строить примеры верхних мер. Достаточно взять $\varkappa<1$ и задать d_n . Например, годятся $d_n=n^{-c}$, где $c>1$, или $d_n=e^{-n^c}$, где $0<c<1$.

§ 2. Доказательство теоремы 2.

Введем для удобства следующие обозначения. Пусть переменные a_i кроме значений из $\mathcal{M}_y$ принимают значения 0,I, $\sim$.

Положим по определению

$$\nu(a_0,\dots,a_n) \equiv \sum_{b_0,\dots,b_n} \nu(b_0,\dots,b_n), \tag{37}$$

где суммирование ведется по всем $b_0,\dots,b_n$, удовлетворяющим условиям:

если $a_i \in m_y$, то $b_i = a_i$;
если $a_i = 0$, то $b_i \in m_y^0$;
если $a_i = 1$, то $b_i \in m_y^1$;
если $a_i = \sim$, то $b_i \in m_y$.

Кроме того, обозначаем

$$\nu(A\,\underbrace{a\dots a}_{n}\,B) \equiv \nu(A\,(a)^n\,B), \tag{38}$$

где a любой символ, A, B – любые комбинации символов. Доказательство включает три леммы: одну об инвариантных мерах, две другие – о мерах из W_1.

Лемма I. Пусть однородная мера μ инвариантна для однородной случайной среды, удовлетворяющей (2,6). Пусть при некоторых $c_1 > 0$, n_1, n_2

$$\mu\left((1)^k(\sim)^{n_1}\,0\,(\sim)^{n_2}(1)^\ell\right) \geq c_1\,\mu\left((1)^k\right)\mu\left((1)^\ell\right) \tag{39}$$

для всех $k,\ell = 0,1,2,\dots$. Тогда при некотором $c > 0$

$$\mu\left((1)^n\right) \geq c\sum_{k=0}^{n} \mu\left((1)^k\right)\mu\left((1)^{n-k}\right) \tag{40}$$

для всех $n = 0,1,2,\dots$

Доказательство. Положим $t = \max\{0,\ 2r-n_1-n_2-1\}$, $m = n-2r+n_1+n_2+t$. Тогда $n \leq m+1$. Обозначая через A, B, D любые комбинации единиц и нулей длины n_1, n_2, t соответственно, получим:

$$\mu((1)^n) \geq \mu((1)^{m+1}) = \sum_{b_{-r},\dots,b_{m+r}} \mu(b_{-r},\dots,b_{m+r}) \prod_{j=1}^{m} \varphi^1(b_{j-r},\dots,b_{j+r}) \geq$$

$$\geq \sum_{A,B,D} \sum_{k=0}^{n} \mu((1)^k A O B (1)^{n-k} D) \left(\varphi^1_{min}\right)^{n_1+n_2+1+2r+t} =$$

$$= \left(\varphi^1_{min}\right)^{n_1+n_2+1+2r+t} \sum_{k=0}^{n} \mu\left((1)^k (\sim)^{n_1} O (\sim)^{n_2} (1)^{n-k}\right) \geq$$

$$\geq C_1 \left(\varphi^1_{min}\right)^{n_1+n_2+1+2r+t} \sum_{k=0}^{n} \mu((1)^k)\, \mu((1)^{n-k}),$$

где φ^1_{min} определено в (6). Лемма I доказана.

Лемма 2. Для всякой меры $\mu = \nu_f \in W_1$ существует такое λ_μ, $0 \leq \lambda_\mu \leq 1$ и такие $\alpha_1, \alpha_2 \in \{1,\dots,m\}$, что

$$C_1 \lambda_\mu^n \leq \nu((1)^n) \leq C_2 \lambda_\mu^n, \tag{41}$$

$$C_1 \lambda_\mu^n \leq \nu((1)^{n-1} 1_{\alpha_1}), \tag{42}$$

$$C_1 \lambda_\mu^n \leq \nu(1_{\alpha_2} (1)^{n-1}), \tag{43}$$

где $0 < C_1 < C_2$. Здесь правое неравенство в (41) выполняется при $n \geq n_0$, прочие – при всех $n > 1$.

Доказательство. Можно считать, что $\nu(1_\alpha) > 0$ при всех α от 1 до m. Введем вектор $\bar{p}$:

$$\bar{p} = \{\nu(1_1),\dots,\nu(1_m)\}$$

и матрицы $\pi^{п}$, $\pi^{л}$ (правая, левая):

$$\pi^{п} = \{\pi^{п}_{\gamma\delta}\}, \quad \pi^{л} = \{\pi^{л}_{\gamma\delta}\}, \text{ где}$$

$$\pi^{п}_{\gamma\delta} = \frac{\nu(1_\gamma 1_\delta)}{\nu(1_\gamma)}, \quad \pi^{л}_{\gamma\delta} = \frac{\nu(1_\delta 1_\gamma)}{\nu(1_\gamma)}$$

Тогда:

а) суммы компонентов векторов $\bar{p}(\pi^{п})^{n-1}$ и $\bar{p}(\pi^{л})^{n-1}$ обе равны $\nu((1)^n)$;

б) α -я компонента $\bar{p}(\pi^{п})^n$ равна $\nu((1)^n 1_\alpha)$;

в) α -я компонента $\bar{p}(\pi^{л})^n$ равна $\nu(1_\alpha (1)^n)$.

Поскольку $\pi^{п}$ - матрица с неотрицательными элементами, то [3] одно из ее собственных значений $\lambda_\mu^{п}$ действительно, неотрицательно и не меньше модулей всех остальных её собственных значений. Положим $\lambda_\mu = \lambda_\mu^{п}$. Тогда правое неравенство в (41) очевидно. Известно [3], что $\lambda_\mu^{п}$ соответствует ненулевой собственный вектор $\bar{q} = \{q_1, \ldots, q_m\}$, где все $q_\alpha \geq 0$, $q_1 + \ldots + q_m = 1$. Выберем такое $c > 0$, что $\bar{p} \geq c\bar{q}$ (покоординатно). Тогда

$$\nu((1)^n) \geq c(\lambda_\mu^{п})^{n-1},$$

откуда следует левое неравенство в (41). Выберем α_1 такое, что $q_{\alpha_1} > 0$. Тогда

$$\nu((1)^{n-1} 1_{\alpha_1}) \geq c(\lambda_\mu^{п})^{n-1} q_{\alpha_1},$$

что доказывает (42). Чтобы доказать (43), надо ввести $\lambda_\mu^{л}$ - - максимальное собственное значение $\pi^{л}$. Поскольку оно тоже удовлетворяет (41), то $\lambda_\mu^{л} = \lambda_\mu^{п}$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $\mu = \nu f \in W_1$, $\mu \neq \delta_1$. Тогда μ представима в виде

$$\mu = s\delta_1 + (1-s)\mu',$$

где $0 \leq s < 1$. (δ_1 - мера, сосредоточенная на последовательности "все единицы"), $\mu' \in W_1$, μ' удовлетворяет (39).

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что m_y^0 содержит один элемент 0. Введем переменные z_i, принимающие те же m, что и y_i, единичных значений, m бесконечных серий нулевых значений $0_{\alpha,\gamma}$, где $\alpha = 1,\dots,m$, $\gamma = 1,2,\dots$ и одно особое нулевое значение 0_0. Определим на $Z = \{z\}$, $z = \dots, z_{-1}, z_0, z_1, \dots$ однородную марковскую меру ρ. Она задается величинами

$$\left.\begin{aligned} &\rho(1_\alpha) = \nu(1_\alpha), \\ &\rho(0_{\alpha,\gamma}) = \nu(1_\alpha(0)^\gamma), \\ &\rho(0_0) = \lim_{n\to\infty} \nu((0)^n), \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

и переходными вероятностями вида $\rho(a \to b) \equiv \dfrac{\rho(ab)}{\rho(a)}$:

$$\left.\begin{aligned} &\rho(1_\alpha \to 1_\beta) = \nu(1_\alpha 1_\beta)/\nu(1_\alpha); \\ &\rho(1_\alpha \to 0_{\alpha,1}) = \nu(1_\alpha 0)/\nu(1_\alpha); \\ &\rho(0_{\alpha,\gamma} \to 0_{\alpha,\gamma+1}) = \nu(1_\alpha(0)^{\gamma+1})/\nu(1_\alpha(0)^\gamma); \\ &\rho(0_{\alpha,\gamma} \to 1_\beta) = \nu(1_\alpha(0)^\gamma 1_\beta)/\nu(1_\alpha(0)^\gamma); \\ &\rho(0_0 \to 0_0) = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Прочие переходные вероятности равны нулю. Легко проверить, что переходные вероятности образуют стохастическую матрицу марковской цепи со счетным числом состояний [5], для которой величины (44) представляют инвариантный вектор вероятностей. Мера ρ задана.

Можно проверить, что мера ρ индуцирует меру ν при следующем отображении $g: Z \to Y$:

$$y_i = \begin{cases} 1_\alpha, & \text{если } z_i = 1_\alpha, \\ 0, & \text{если } z_i \in m_0^z. \end{cases} \qquad (46)$$

Будем говорить только о тех состояниях цепи - значениях z_i, вероятности которых положительны. Они разбиваются на конечное число $p \le m+1$ классов. Мера ρ представима как линейная комбинация марковских мер $\rho_1, \dots, \rho_p$, сосредоточенных каждая на своем классе:

$$\rho = \sum_{j=1}^{p} d_j \rho_j ,$$

где все $d_j > 0$, $d_1 + \dots + d_p = 1$. Пусть мерам $\rho_1, \dots, \rho_q$ соответствуют классы, не содержащие нулевых значений, а каждой из мер $\rho_{q+1}, \dots, \rho_p$ соответствует класс, содержащий хотя бы одно нулевое значение. Тогда представим ρ в виде:

$$\rho = s\rho_1' + (1-s)\rho_2' \text{, где } s = \sum_{j=1}^{q} d_j ,$$

$$\rho_1' = \sum_{j=1}^{q} \frac{d_j}{s} \rho_j , \quad \rho_2' = \sum_{j=q+1}^{p} \frac{d_j}{1-s} \rho_j .$$

Очевидно $s < 1$, $\rho_1' g f = \delta_1$, $\rho_2' g f \in W_1$.

Обозначим $\mu' = \rho_2' g f$, $\mu_j = \rho_j g f$. Очевидно, все $\mu_j \in W_1$.

Тогда

$$\mu' = \sum_{j=q+1}^{p} \frac{d_j}{1-s} \mu_j , \quad \lambda_{\mu'} = \max_{q+1 \le j \le p} \lambda_{\mu_j} .$$

Применим лемму 2 к той мере μ_{j_0}, для которой $\lambda_{\mu_{j_0}} = \lambda_{\mu'}$. Пусть α_1, α_2 таковы, что

$$c_1 \lambda_{\mu'}^n \le \rho_{j_0}\left((1)^n 1_{\alpha_1}\right), \quad c_1 \lambda_{\mu'}^n \le \rho_{j_0}\left(1_{\alpha_2} (1)^n\right).$$

Пусть $0_{\beta,\gamma}$ - нулевое состояние, входящее в j_0 - класс.

Тогда при некоторых n_1, n_2:

$$\rho_{j_0}\left(1_{\alpha_1} (\sim)^{n_1} 0_{\beta,\gamma}\right) > 0 , \quad \rho_{j_0}\left(0_{\beta,\gamma} (\sim)^{n_2} 1_{\alpha_2}\right) > 0 .$$

Тогда

$$\mu'\left((1)^k (\sim)^{n_1} 0 (\sim)^{n_2} (1)^\ell\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{d_j}{1-s} \rho_{j_0}\left((1)^{k-1} 1_{\alpha_1} (\sim)^{n_1} 0_{\beta,\gamma} (\sim)^{n_2} 1_{\alpha_2} (1)^{\ell-1}\right) =$$

$$= \frac{d_{j_0}}{1-s}\,\frac{\rho_{j_0}\left((1)^{k-1}1_{\alpha_1}\right)\cdot\rho_{j_0}\left(1_{\alpha_1}(\sim)^{n_1}0_{\beta,\gamma}\right)\cdot\rho_{j_0}\left(0_{\beta,\gamma}(\sim)^{n_2}1_{\alpha_2}\right)\cdot\rho_{j_0}\left(1_{\alpha_2}(1)^{\ell-1}\right)}{\rho_{j_0}(1_{\alpha_1})\cdot\rho_{j_0}(0_{\beta,\gamma})\cdot\rho_{j_0}(1_{\alpha_2})} =$$

$$= C_3\,\rho_{j_0}\left((1)^{k-1}1_{\alpha_1}\right)\cdot\rho_{j_0}\left(1_{\alpha_2}(1)^{\ell-1}\right),$$

где $C_3>0$. Применив (42,43), затем (4I), получим требуемое.

Теперь докажем теорему 2. Предположим, что $\mu\in W_1$, $\mu\neq\delta_{1)}$, μ инвариантна для среды, удовлетворяющей (2,6). Разложим μ по лемме 3:

$$\mu = s\delta_1 + (1-s)\mu' .$$

Раз μ, δ_1 инвариантны, то и μ' инвариантна. Раз μ' удовлетворяет (39) и инвариантна, то по лемме I величины $\mu'((1)^n)$ удовлетворяют (40). Но (40) противоречит (4I): поскольку $\mu'((1)^n)$ удовлетворяют (4I), то левая часть (40) убывает как $\lambda^n_{\mu'}$, а правая – как $n\lambda^n_{\mu'}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Необходимость следует из леммы I в § 2, в которой неравенство только усиливается, если верхняя мера μ не инвариантна. Посылка леммы (39) выполняется уже при $n_1=n_2=0$ и при $C_1=(1-k_{max})^2/\nu(0)$.

Докажем достаточность. Пусть $\mu=\nu f$, где ν задана (32,33) при условии (34). Обозначим $\mu\vee\varphi_c=\mu^H$. Меру ν можно изобразить схемой рис.3. Мера μ^H представима как $\mu^H=\nu^H f$, где мера ν^H изображается схемой на рис.4.

Найдем сначала $\theta > 0$, при котором

$$(\mu - \mu^{н})((1)^{n}) \geq 0, \tag{47}$$

то есть, неотрицательны все коэффициенты ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu - \mu V_{\varphi_c})((1)^{n}) x^{n} = \frac{1}{1-x}(S_{\mu н} - S_{\mu})$$

где

$$S_{\mu н} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{н}(0(1)^{n}) x^{n},$$

$$S_{\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(0(1)^{n}) x^{n}.$$

Очевидно,

$$S_{\mu} = \mu(0)(1 + k_1 x + k_1 k_2 x^2 + \dots) = \mu(0) S,$$

где S определено в (36). Вычислим $S_{\mu н}$. Разложим его в ряд:

$$S_{\mu н} = S^{0}_{\mu н} + S^{1}_{\mu н} + S^{2}_{\mu н} + \dots,$$

где

$$S^{m}_{\mu н} = \nu^{н}(0_m) + \sum_{n=0}^{\infty} \nu^{н}(0(1)^{n} 1_m) x^{n+1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Ряды $S^{m}_{\mu н}$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} S^{0}_{\mu н} &= (1-\theta)\mu(0) + \theta x \sum_{m=0}^{\infty} S^{m}_{\mu н}(1 - k_{m+1}), \\ S^{1}_{\mu н} &= k_1(1-\theta)\mu(0) + k_1 \theta x S^{0}_{\mu н}, \\ S^{m}_{\mu н} &= k_m x S^{m-1}_{\mu н}, \quad m = 2, 3, \dots \end{aligned}\right\}$$

Решив её, находим $S_{\mu н}$, а затем и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu - \mu^{н})((1)^{n}) x^{n-1} = \frac{R - \theta\{(1-k_1) + [2 + (1-k_1)x]R\} - \theta^2\{(k_1 - R) + x(k_1+1)R + x^2 R^2\}}{1 - \theta(1-k_1)x - \theta^2 x[k_1 + (x-1)R]},$$

где

$$R = k_1 + k_1 k_2 x + k_1 k_2 k_3 x^2 + \dots = \frac{S-1}{x}.$$

Для того, чтобы все коэффициенты этого ряда были неотрицательны, достаточно, чтобы были неотрицательны все коэффициенты числителя, а это, очевидно, следует при некотором $\theta > 0$ из (35). Пусть θ_1 - наибольшее значение θ такое, что при $\theta \leq \theta_1$ выполняются все неравенства (47).

Докажем теперь, что при некотором $\theta > 0$ выполняются все неравенства (31). Это заведомо будет так, если выполнятся все неравенства вида

$$(\mu - \mu^H)\left((1)^{p_1} 0 (\sim)^{q_1} (1)^{p_2} 0 (\sim)^{q_2} \dots (1)^{p_s}\right) \geqslant 0, \quad (48)$$

где последовательность в скобках такова, что после каждого массива единиц, кроме последнего, стоит один нуль, затем могут стоять или не стоять знаки " $\sim$ ", а потом начинается следующий массив единиц. Все $p_i \geqslant 1$, все $q_i \geqslant 0$. Неравенство (48) можно переписать так:

$$\left|\overline{W}(M_1^c)^{p_1} M_0^c (M)^{q_1} (M_1^c)^{p_2} M_0^c (M)^{q_2} \dots (M_1^c)^{p_s}\right| \geqslant$$
$$\geqslant \left|\overline{W}(M_1^H)^{p_1} M_0^H (M)^{q_1} (M_1^H)^{p_2} M_0^H (M)^{q_2} \dots (M_1^H)^{p_s}\right|. \quad (49)$$

Здесь $|\overline{V}|$ означает сумму компонент бесконечномерного вектора $\overline{V}$: $|\overline{V}| = \sum_{i=0}^{\infty} V_i$, где $\overline{V} = \{V_0, V_1, V_2, \dots\}$. Вектор $\overline{W}$ - собственный для матрицы переходных вероятностей (32):

$$\overline{W} = \{1, k_1, k_1 k_2, k_1 k_2 k_3, \dots\}$$

Операторы, действующие на $\overline{W}$ справа, таковы:

$$\overline{V} M = \left\{\sum_{i=0}^{\infty} V_i (1 - k_{i+1}), V_0 k_1, V_1 k_2, \dots\right\}$$

(M -матрица переходных вероятностей (32));

$$\overline{V} M_1^c = \{0,\ V_0 K_1,\ V_1 K_2, \dots\},$$

$$\overline{V} M_0^c = \{\sum_{i=0}^{\infty} V_i (1-K_{i+1}),\ 0,\ 0, \dots\},$$

$$\overline{V} M_1^H = \{\theta \sum_{i=0}^{\infty} V_i (1-K_{i+1}),\ \theta V_0 K_1,\ V_1 K_2,\ V_2 K_3, \dots\},$$

$$\overline{V} M_0^H = \{(1-\theta)\sum_{i=0}^{\infty} V_i (1-K_{i+1}),\ (1-\theta) V_0 K_1,\ 0,\ 0, \dots\}.$$

Определим еще оператор M_1^0 :

$$\overline{V} M_1^0 = \{0,\ 0,\ V_1 K_2,\ V_2 K_3, \dots\}$$

Теперь неравенство (47) можно записать так:

$$\left|\overline{W}\left(M_1^c\right)^n\right| \geqslant \left|\overline{W}\left(M_1^H\right)^n\right|, \quad n = 1, 2, \dots \tag{50}$$

или так:

$$W_n = \left|\overline{W}\left[(M_1^c)^n - (M_1^0)^n\right]\right| \geqslant \left|\overline{W}\left[(M_1^H)^n - (M_1^0)^n\right]\right|,$$

где W_n – n -я компонента $\overline{W}$. Тогда и неравенство

$$\left|\overline{W}\left[(M_1^H)^n - (M_1^0)^n\right]\right| \leqslant F W_n, \quad \text{где } 0 < F \leqslant 1 \tag{51}$$

выполняется при некотором $\theta > 0$, во всяком случае при $\theta \leqslant F\theta_1$. Достаточно заметить, что левая часть (51) – многочлен от θ с неотрицательными коэффициентами и нулевым свободным членом.

Будем теперь рассматривать пары векторов $\overline{W}$ и $\overline{W}$, затем $\overline{W}(M_1^c)^{p_1}$ и $\overline{W}(M_1^H)^{p_1}$, затем $\overline{W}(M_1^c)^{p_1} M_0^c$ и $\overline{W}(M_1^H)^{p_1} M_0^H$ и так далее: каждая новая пара получается домножением на соответствующие порции операторов из последовательностей в левой и правой частях (49).

Докажем по индукции следующую совокупность утверждений об этих парах векторов. Значения θ и положительных констант A, B , C , $\mathcal{D}$, E , F будут выбраны ниже.

I. Если $\overline{\mathcal{U}}^1$ и $\overline{V}^1$ – пара, получившаяся после умножения на M_0^c и M_0^H, то:

а) $\overline{\mathcal{U}}^1 = \{ \mathcal{U}_0^1, 0, 0, \dots \}$;

б) $\overline{V}^1 = \{ V_0^1, V_1^1, 0, \dots \}$;

в) $V_0^1 \leq \mathcal{U}_0^1$;

г) $V_1^1 \leq \theta A\, \mathcal{U}_0^1$.

2. Если $\overline{\mathcal{U}}^2$ и $\overline{V}^2$ – пара, получившаяся после умножения на $(M)^{q_i}$ и $(M)^{q_i}$, то:

$\overline{V}^2$ представляется в виде:

а) $\overline{V}^2 = \overline{V}^{2,1} + \overline{V}^{2,2}$,

причем

б) $\overline{V}^{2,1} \leq \overline{\mathcal{U}}^2$ (покоординатно)

в) $\overline{V}^{2,2} \leq \theta B\, \mathcal{U}_0^2\, \overline{W}$

и, кроме того,

г) $\overline{\mathcal{U}}^2 \leq C\, \mathcal{U}_0^2\, \overline{W}$.

3. Если $\overline{\mathcal{U}}^3$ и $\overline{V}^3$ – пара, получившаяся после умножения на $(M_1^c)^{p_i}$ и $(M_1^H)^{p_i}$, то:

$\overline{\mathcal{U}}^3$ и $\overline{V}^3$ представляются в виде:

а) $\overline{\mathcal{U}}^3 = \overline{\mathcal{U}}^{3,1} + \overline{V}^{3,2}$

б) $\overline{V}^3 = \overline{V}^{3,1} + \overline{V}^{3,2}$,

причем

в) $\overline{\mathcal{U}}^{3,1} \geq 0$, $\overline{V}^{3,1} \geq 0$, $\overline{V}^{3,2} \geq 0$ (покоординатно)

г) $|\overline{V}^{3,1}| \leq \mathcal{D}\, |\overline{\mathcal{U}}^{3,1}|$

и, кроме того,

д) $V_0^3 \leq \theta \mathcal{E}\, |\overline{\mathcal{U}}^3|$.

Тогда (49) следует из 3а, —, 3г при

$$\mathcal{D} \leq 1. \tag{52}$$

Первый шаг индукции состоит в проверке условий пункта 2 для векторов $\overline{U}^2=\overline{V}^2=\overline{W}$. Проверка очевидна при

$$C \geq 1. \tag{53}$$

Индукционный переход состоит из трех лемм.

Лемма I. Если векторы $\overline{U}^1$ и $\overline{V}^1$ удовлетворяют условиям пункта I, то векторы $\overline{U}^2=\overline{U}^1(M)^q$ и $\overline{V}^2=\overline{V}^1(M)^q$ при любом $q\geq 0$ удовлетворяют условиям пункта 2.

Доказательство. Пусть

$$\overline{V}^{1,1}=\{V_0^1, 0, 0, \dots\}, \quad \overline{V}^{2,1}=\overline{V}^{1,1}(M)^q,$$

$$\overline{V}^{1,2}=\{0, V_1^1, 0, \dots\}, \quad \overline{V}^{2,2}=\overline{V}^{1,2}(M)^q.$$

Тогда 2а очевидно, 2б следует из Iв. Докажем 2в. Обозначим $V_0^{(r)}$ нулевую компоненту вектора $\overline{V}^{1,2}(M)^r, r\leq q$. Очевидно, $V_0^{(r)}\leq V_1^1$ (оператор M сохраняет сумму компонент). Тогда

$$V_s^{2,2}=\begin{cases} 0, \text{ если } s>q+1; \\ V_1^1 K_2\dots K_s \quad \text{если } s=q+1; \\ V_0^{(q-s)} K_1\dots K_s \quad \text{если } s<q+1. \end{cases}$$

Во всех случаях

$$V_s^{2,2}\leq V_1^1 K_2\dots K_s \leq \frac{\theta A}{K_{min}} U_0^1 K_1\dots K_s.$$

Итак,

$$\overline{V}^{2,2} \leq \frac{\theta A U_0^1}{K_{min}} \overline{W}.$$

В то же время

$$U_0^2 \geq U_0^1 (1-K_{max}). \tag{54}$$

Поэтому 2в заведомо выполняется, если

$$A \leq K_{min}(1-K_{max}) B. \tag{55}$$

Докажем 2г. Обозначим $\mathcal{U}_0^{(r)}$ нулевую компоненту вектора $\overline{\mathcal{U}}^1(M)^r$, $r \le q$. Очевидно, $\mathcal{U}_0^{(r)} \le \mathcal{U}_0^1$. Тогда

$$\mathcal{U}_s^2 = \begin{cases} 0, & \text{если } s > q \\ \mathcal{U}_0^{(q-s)} k_1 \dots k_s, & \text{если } s \le q. \end{cases}$$

Во всех случаях

$$\mathcal{U}_s^2 \le \mathcal{U}_0^1 \cdot k_1 \dots k_s ,$$

и, учитывая (54), 2г заведомо выполняется при

$$C \geqslant \frac{1}{1-k_{max}} . \tag{56}$$

Лемма 2. Если векторы $\overline{\mathcal{U}}^2$ и $\overline{V}^2$ удовлетворяют условиям пункта 2, то векторы $\overline{\mathcal{U}}^3 = \overline{\mathcal{U}}^2(M_1^c)^p$ и $\overline{V}^3 = \overline{V}^2(M_1^н)^p$ при любом $p \geqslant 1$ удовлетворяют условиям пункта 3.

Доказательство. Пусть $\overline{V}^{3,2} = \overline{V}^{2,1}(M_1^o)^p$

Тогда

$$\overline{\mathcal{U}}^{3,1} = \overline{\mathcal{U}}^3 - \overline{V}^{3,2} = \overline{\mathcal{U}}^2(M_1^c)^p - \overline{V}^{2,1}(M_1^o)^p \geqslant$$

$$\geqslant \overline{\mathcal{U}}^2\left[(M_1^c)^p - (M_1^o)^p\right] = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{p \text{ нулей}}, \mathcal{U}_0^2 k_1 \dots k_p, 0, \dots\}$$

Значит

$$|\overline{\mathcal{U}}^{3,1}| \geqslant \mathcal{U}_0^2 W_p .$$

С другой стороны,

$$\overline{V}^{3,1} = \overline{V}^3 - \overline{V}^{3,2} = \overline{V}^2(M_1^н)^p - \overline{V}^{2,1}(M_1^o)^p =$$

$$= \overline{V}^{2,2}(M_1^н)^p + \overline{V}^{2,1}\left[(M_1^н)^p - (M_1^o)^p\right] \leqslant$$

$$\leqslant \theta B \mathcal{U}_0^2 \overline{W}(M_1^н)^p + C \mathcal{U}_0^2 \overline{W}\left[(M_1^н)^p - (M_1^o)^p\right].$$

Оценим суммы компонент слагаемых.

Применим к первому (50), считая $\theta \leq \theta_1$:

$$|\theta B \mathcal{U}_0^2 \overline{W}(M_1^H)^p| \leq \theta B \mathcal{U}_0^2 |\overline{W}(M_1^c)^p| =$$

$$= \theta B \mathcal{U}_0^2 (W_p + W_{p+1} + \ldots) \leq \theta B \mathcal{U}_0^2 W_p (1 + K_{max} + K_{max}^2 + \ldots) =$$

$$= \frac{\theta B \mathcal{U}_0^2 W_p}{1 - K_{max}}$$

Ко второму применим (5I), считая $\theta \leq F\theta_1$:

$$|C \mathcal{U}_0^2 \overline{W}[(M_1^H)^p - (M_1^o)^p]| \leq C \mathcal{U}_0^2 \cdot F W_p$$

Итак, если

$$\theta \leq F\theta_1 \quad , \text{ где } \quad F \leq 1, \tag{57}$$

то

$$|\overline{V}^{3,1}| \leq \left(\frac{\theta B}{1 - K_{max}} + C F\right) |\overline{\mathcal{U}}^{3,1}|,$$

и 3г заведомо выполняется при

$$\frac{\theta B}{1 - K_{max}} + CF \leq \mathcal{D} \tag{58}$$

Докажем 3д.

$$V_0^3 \leq \theta |\overline{V}^2 (M_1^H)^{p-1}| = \theta |(\overline{V}^{2,1} + \overline{V}^{2,2})(M_1^H)^{p-1}| \leq$$

$$\leq \theta |(C \mathcal{U}_0^2 \overline{W} + \theta B \mathcal{U}_0^2 \overline{W})(M_1^H)^{p-1}| =$$

$$= \theta \mathcal{U}_0^2 (C + \theta B) |\overline{W}(M_1^H)^{p-1}| \leq \theta \mathcal{U}_0^2 (C + \theta B) |\overline{W}(M_1^c)^{p-1}| =$$

$$= \theta \mathcal{U}_0^2 (C + \theta B)(W_{p-1} + W_p + \ldots) \leq \frac{\theta (C + \theta B)}{1 - K_{max}} \mathcal{U}_0^2 W_{p-1} \leq$$

$$\leq \frac{\theta (C + \theta B)}{K_{min}(1 - K_{max})} \mathcal{U}_0^2 W_p$$

В то же время $|\bar{u}^3| \geqslant u_p^3 = u_0^2 W_p$,

и 3д заведомо выполняется при

$$\frac{\theta B + C}{K_{min}(1-K_{max})} \leq \varepsilon \qquad (59)$$

Лемма 3. Если векторы $\bar{u}^3$ и $\bar{V}^3$ удовлетворяют условиям пункта 3, то векторы $\bar{u}^1 = \bar{u}^3 M_0^c$ и $\bar{V}^1 = \bar{V}^3 M_0^H$ удовлетворяют условиям пункта I.

Доказательство. Условия Iа, Iб очевидны. Докажем Iв.

$$u_0^1 - V_0^1 = \left[u_0^{3,1}(1-K_1) + u_1^{3,1}(1-K_2) + \ldots\right] - \left[V_0^{3,1}(1-K_1) + V_1^{3,1}(1-K_2) + \ldots\right] \geqslant$$

$$\geqslant |\bar{u}^{3,1}|(1-K_{max}) - |\bar{V}^{3,1}| \geqslant 0.$$

Это следует из 3г при

$$\mathcal{D} \leq 1 - K_{max}. \qquad (60)$$

Докажем Iг.

$$V_1^1 = V_0^3 K_1 \leq \theta \varepsilon |\bar{u}^3|$$

$$u_0^1 = u_0^3(1-K_1) + u_1^3(1-K_2) + \ldots \geqslant (1-K_{max})|\bar{u}^3|,$$

и Iг заведомо выполнится, если

$$\varepsilon \leq (1-K_{max}) A. \qquad (61)$$

Чтобы выполнить условия (52,53,55,56,57,58,59,60,61) достаточно положить:

$$A = \frac{2}{K_{min}(1-K_{max})^3}; \qquad B = \frac{2}{K_{min}^2(1-K_{max})^4};$$

$$C = \frac{1}{1-K_{max}}; \qquad \mathcal{D} = 1 - K_{max};$$

$$\varepsilon = \frac{2}{K_{min}(1-K_{max})^2}; \quad F = \frac{K_{min}^2(1-K_{max})^6}{2\theta + K_{min}^2(1-K_{max})^2};$$

$$\Theta = \min\left\{ F\theta_1 ; \quad \frac{1}{2} K_{min}^2 (1-K_{max})^3 \right\} = F\theta_1 .$$

§ 4. О последовательностях, удовлетворяющих (35)

Пусть положительная ограниченная последовательность ρ_n удовлетворяет (35). Очевидно, при всех n

$$\rho_{2n} > c\rho_n^2$$

Поэтому

$$\rho_{2^m} > \frac{1}{c}(c\rho_1)^{2^m}$$

Поэтому $S = \sum \rho_n x^n$ расходится при $x > \frac{1}{c\rho_1}$. Значит, S имеет конечный радиус сходимости r : $0 < r < \infty$. Обозначим

$$\frac{1}{r} = \varkappa, \quad d_n = \rho_n \varkappa^{-n}$$

и запишем S в виде:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (\varkappa x)^n .$$

Ряд $\sum d_n x^n$ имеет радиус сходимости I. Числа d_n удовлетворяют условию, подобному (33):

$$d_n \geqslant c \sum_{k=0}^{n} d_k d_{n-k} \tag{62}$$

при том же c. Поэтому при всех n

$$d_{2n} > c d_n^2$$

Пусть d_n не ограничены. Тогда при некотором n_0

$$d_{n_0} \geqslant \frac{2}{c} .$$

Тогда

$$d_{2^m n_0} > \frac{2^{2^m}}{c}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

и радиус сходимости ряда $\sum d_n x^n$ меньше единицы. Значит, $d_n \le \mathcal{D}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\mathcal{D}$ - константа. Пусть $d_n \ge \varepsilon > 0$ при всех n. Тогда условие (62) не выполняется, так как

$$\sum_{k=0}^{n} d_k d_{n-k} \ge (n+1)\varepsilon^2.$$

Значит, $\underline{\lim}\, d_n = 0$. Тогда можно выбрать такую бесконечную последовательность номеров $n_1, n_2, \ldots$, что при всяком ℓ $d_{n_\ell} \le d_n$ для всех $n < n_\ell$.

Тогда

$$\sum_{k=0}^{n_\ell} d_k \le \sum_{k=0}^{n_\ell} d_k \cdot \frac{d_{n_\ell - k}}{d_{n_\ell}} = \frac{1}{d_{n_\ell}} \sum_{k=0}^{n_\ell} d_k d_{n_\ell - k} \le \frac{1}{c},$$

откуда ряд $\sum d_k$ сходится.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васерштейн Л.Н., Леонтович А.М. Об инвариантных мерах некоторых марковских операторов, описывающих однородную случайную среду. Проблемы передачи информации, 6,1,1970, 71-80.
2. Васильев Н.Б. Корреляционные уравнения для стационарной меры одной марковской цепи. Теория вероятностей и её применения, 15, 3, 1970, 536-541.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М, 1967, гл.XIII.
4. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей М.-Л., 1936.
5. Колмогоров А.Н. Цепи Маркова со счётным числом возможных состояний. Бюлл. МГУ, I, 3, 1937.
6. Митюшин Л.Г. Неэргодичность однородных пороговых сетей при малом самовозбуждении. Проблемы передачи информации, 6, 3, 1970.
7. Мур Э.Ф., Шеннон К.Э. Надёжные схемы из ненадёжных реле. Кибернетический сборник, I, ИЛ, 1960.
8. Немыцкий В.В. Метод неподвижных точек в анализе. Успехи матем. наук, I, 1936.
9. Ставская О.Н., Пятецкий-Шапиро И.И. Об однородных сетях из спонтанно-активных элементов. Проблемы кибернетики, 20, 1968.
10. Тоом А.Л. Об одном семействе сетей из формальных нейронов. ДАН СССР, 183, I, 1968.
11. Тоом А.Л. Неэргодичность в однородных случайных средах. сб. "Вероятностные методы исследования", вып 1, изд. МГУ, 1972.

12. Тоом А.Л. Об инвариантных мерах в неэргодичных случайных средах. Там же.

13. Шнирман М.А. К вопросу об эргодичности одной цепи Маркова с бесконечным множеством состояний. Проблемы кибернетики, 20, 1968.