Из этой формулы мы видим, что t будет тем меньше, чем больше x и чем меньше y. Возьмем самое большое возможное значение x и самое меньшее y: $x = 1$, $y = 0$. При этом $t = 12$ минут, а $z = \frac{1}{7}$ находится в допустимых пределах.

Следовательно, наименьшее значение t достигается в том случае, когда Малыш съедает торт и выпивает $\frac{1}{7}$ кастрюли молока, а Карлсон съедает все варенье и выпивает $\frac{6}{7}$ кастрюли молока.

∇ Мы свели задачу 4-8 к *задаче линейного программирования*: найти минимум линейной функции при условии, что переменные неотрицательны и удовлетворяют системе линейных неравенств и уравнений.

Если бы потребовалось решать аналогичную задачу для $n > 3$ продуктов, то такой метод решения привел бы к довольно громоздким вычислениям; однако можно указать простое общее правило, указывающее оптимальный план распределения продуктов.

Пусть a_i – время, за которое i-й продукт может съесть Малыш, b_i – время, за которое его может съесть Карлсон; при этом мы будем считать, что продукты занумерованы в порядке возрастания отношений этих времен:

$$\frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_2}{b_2} \le \ldots \le \frac{a_n}{b_n}. \tag{1}$$

План, при котором время завтрака будет наименьшим, состоит в следующем: Малыш начинает с первого продукта и ест их дальше по порядку номеров, а Карлсон начинает одновременно с ним с последнего продукта и ест их в обратном порядке.

В нашей задаче три продукта надо упорядочить следующим образом: первый – торт, второй – молоко, третий – варенье. Отношения времен при этом будут удовлетворять неравенствам

$$\frac{10}{6} \le \frac{4}{7} \le \frac{13}{6}.$$

В первые 6 минут Карлсон съедает варенье, а Малыш съедает часть торта. За следующие 4 минуты Малыш доедает торт, а Карлсон выпивает $\frac{4}{7}$ молока. И, наконец, за последние 2 минуты они оба выпивают оставшееся молоко. В результате Малышу достается $\frac{1}{7}$ молока, а Карлсону – $\frac{6}{7}$.

Для доказательства оптимальности предлагаемого плана удобно ввести условную меру для каждого продукта. Будем считать питательность i-го продукта равной $(a_i + b_i)$ калорий, тогда скорость питания (калорий в единицу времени) при поедании i-го продукта у Малыша равна $\frac{a_i + b_i}{a_i} = 1 + \frac{b_i}{a_i}$, а у Карлсона $\frac{a_i + b_i}{b_i} = 1 + \frac{a_i}{b_i}$. Мы видим, что скорость Малыша тем больше, чем меньше a_i/b_i, а скорость Карлсона – наоборот. Таким образом, чтобы за время t получить как можно больше калорий, Малыш должен есть продукты в порядке номеров, а Карлсон – в обратном порядке. Пусть Малыш и Карлсон получили по нашему плану все $(a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n)$ калорий за некоторое время t. Тогда при любом другом плане за то же время t они получат меньше калорий, а значит, не смогут съесть все продукты.

Можно указать графическую процедуру, дающую ответ. Нарисуем во второй четверти координатной плоскости Oxy ломаную, звенья которой – векторы с координатами $(b_1; a_1), (b_2; a_2), \ldots, (b_n; a_n)$, идущие в таком порядке, что выполнены неравенства (1); начало M этой ломаной лежит на оси Ox, конец K – на оси Oy (рис.47 соответствует случаю $n = 3$; в задаче 4-8 три вектора, составляющие ломаную, имеют координаты (6; 10), (7; 14) и (6; 13)). Отметим точку L пересечения этой ломаной с биссектрисой $x + y = 0$ второй координатной четверти. Ордината t точки L указывает искомое минимальное время, причем часть ML ломаной указывает продукты, которые съедает Малыш, а часть LK – Карлсон.

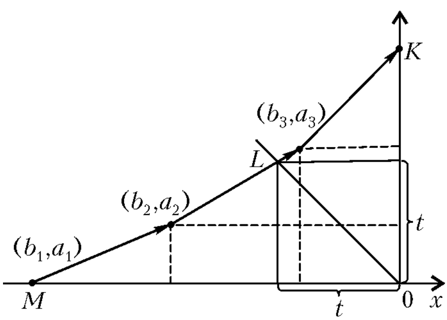

Рис. 47

Задача **4-9.** *Ответ*: 10 или 11 поездов.

Пусть поезда отправляются с интервалом в T минут. Поскольку за 12 минут заведомо прошло 4 полных интервала, $4T \leq 12$, т.е. $T \leq 3$. Так как до отправления первого из 5 поездов и после ухода последнего из них прошло не более чем по T мин, то $T + 4T + T > 12$, т.е. $T > 2$. Итак, $2 < T \leq 3$.

Аналогично, из того, что за 20 минут отправилось ровно 6 поездов, получаем $20/7 < T \leq 4$. Из этих неравенств следует, что $2\frac{6}{7} < T \leq 3$.

Пусть за 30 минут отправилось n поездов. Тогда аналогично получаем $(n-1)T \leq 30 < (n+1)T$ или $\frac{30}{T} - 1 < n \leq \frac{30}{T} + 1$.

Учитывая, что $2\frac{6}{7} < T \le 3$, найдем, что $9 < n \le 11$, т.е. $n = 10$ или $n = 11$.

Если $T = 3$ и первый поезд отправляется сразу по приходу Вити, то за 30 минут отправится 11 поездов, а если при таком же T первый поезд отправится через 1 минуту после его прихода, то за 30 минут отправится 10 поездов, т.е. оба варианта ответа реализуются.

∇ Решение этой задачи связано с таким общим вопросом. Пусть на равных расстояниях T друг от друга на прямой расставлены точки. Какое количество n этих точек может содержать отрезок длины b? Ответ: $\frac{b}{T} - 1 < n \le \frac{b}{T} + 1$.

Задача **4-10.** *Ответ*: 5 трехтонок.

Покажем сначала, что 4 трехтонок может не хватить. Возьмем 13 одинаковых ящиков весом по $10/13$ тонны. Тогда в одну трехтонку мы не сможем поместить больше трех ящиков, а в четыре – больше 12 ящиков.

Докажем теперь, что 5 трехтонок всегда хватает. Действительно в каждую трехтонку мы можем погрузить не меньше двух тонн груза (если погружено меньше двух тонн, мы сможем добавить еще ящик). Тогда в 5 трехтонок можно погрузить не меньше 10 тонн.

∇ Более общая задача. Несколько ящиков весят вместе T тонн, причем каждый из них весит не более 1 тонны. Какое наименьшее количество p-тонок ($p > 1$) заведомо достаточно, чтобы увезти за один раз весь этот груз?

Пусть $\gamma = \frac{p}{[p]+1}$, где $[p]$ – целая часть числа p. Тогда ответ – это наименьшее целое число N, большее или равное $\frac{T-\gamma}{p-\gamma}$.

В примере, показывающем, что меньшего количества машин может не хватить, нужно все грузы взять равными (и несколько большими γ). Загружать N ящиков можно в порядке убывания их масс. Для доказательства удобно использовать следующую лемму: если имеется несколько ящиков общей массой больше p тонн (каждый – не больше 1), то можно загрузить на p-тонку больше $p-\gamma$ тонн. В задаче 4-10 $p = 3$, $T = 10$, $\gamma = 3/4$; из леммы следует, что на одну трехтонку можно загрузить больше $2\frac{1}{4}$ тонны, а весь груз, 10 тонн, как мы знаем, можно увезти на 5 трехтонках; это как раз наименьшее целое число, большее или равное

$$\frac{T-\gamma}{p-\gamma}=\frac{37}{9}.$$

Для знатоков. Эту задачу интересно сравнить с часто встречающейся в приложениях «*задачей о камнях*». Имеются несколько камней с известными массами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и p-тонка (p, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – натуральные числа). Спрашивается, можно ли из этих камней выбрать несколько так, чтобы полностью загрузить ими p-тонку? Другими словами, существуют ли такие числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, равные 0 или 1, что выполняется равенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = p\ ?$$

Последняя задача относится к классу так называемых *универсальных переборных задач*. Для их решения неизвестен алгоритм, работающий существенно быстрее, чем полный перебор всех вариантов. (В отличие от этой задачи загрузку ящиков, о которой говорилось в обобщении задачи 4-10, можно произвести очень быстро; см. [97].)

Задача **4-11.** *Ответ*: либо все три числа равны нулю, либо одно из них равно нулю, а два других – единице.

Заметим, что все три числа неотрицательны, так как каждое из них – квадрат. Обозначим их в порядке убывания так: $x \geq y \geq z \geq 0$.

Тогда $x-z \geq y-z \geq 0$, откуда $(x-z)^2 \geq (y-z)^2$. Но $(x-z)^2 = y$, а $(y-z)^2 = x$. Итак, с одной стороны, $x \geq y$, с другой, $y \geq x$ и тем самым $x = y$. В таком случае получаем $z = 0$ и $x = x^2$, т.е. $x = 0$ или $x = 1$.

∇ Неравенства не участвовали в условии этой задачи, а появились в решении. Идея упорядочить равноправные неизвестные помогает и во многих других ситуациях.

Задача **4-12.** Заметим, что m и n входят симметрично в условие задачи, поэтому можно считать, что $m \geq n \geq 2$. При этом $\sqrt[m]{n} \leq \sqrt[n]{n}$. Таким образом, достаточно доказать неравенство $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$ или

$$n^{1/n} \leq 3^{1/3}. \qquad (1)$$

Если $n = 2$, неравенство $2^{1/2} \leq 3^{1/3}$ верно, поскольку при возведении обеих его частей в шестую степень получается $8 < 9$.

Возьмем теперь натуральный логарифм от обеих частей неравенства (1) и докажем, что $\frac{\ln n}{n} \leq \frac{\ln 3}{3}$ при $n \geq 3$.

Производная от функции $\ln x/x$ отрицательна при $x \geq 3$:

$$(\ln x/x)' = (1 - \ln x)/x^2 < 0 ,$$

так как $\ln x > 1$ при $x \geq 3 > e$.

Отсюда следует, что функция $\ln x/x$ убывает при $x \geq 3$ и, следовательно, $\ln x/x \leq \ln 3/3$ при $x \geq 3$.

∇ Неравенство $n^3 \leq 3^n$ для натуральных $n \geq 3$ можно доказать и по индукции; если оно верно для некоторого $n = k$, то верно и для следующего $n = k + 1$: неравенство $(k+1)^3 \leq 3^{k+1}$ получается из $k^3 \leq 3^k$ почленным умножением на верное (при $k \geq 3$) неравенство $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^3 \leq 3$.

Задача **4-13.** *Ответ*: наименьшее значение достигается при $n = 10^{10} - 1$ и при $n = 10^{10}$. Положим

$$a_n = \frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \ldots \cdot \lg n}{10^n} .$$

Заметим, что

$$a_n = (\lg n/10)\, a_{n-1} .$$

Если $\lg n < 10$, то $a_n < a_{n-1}$; если $\lg n = 10$, то $a_n = a_{n-1}$; если $\lg n > 10$, то $a_n > a_{n-1}$. Таким образом, последовательность (a_n) убывает до $n = 10^{10} - 1$, затем имеет два равных члена с номерами $10^{10} - 1$ и 10^{10}, а начиная со следующего номера последовательность возрастает.

Задача **4-14.** *Ответ*: наибольшее значение равно $1/4$.

Это значение достигается, например, при $x_1 = x_2 = 1/2$ и $x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Покажем, что $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 \leq 1/4$ при всех неотрицательных значениях x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. В самом деле,

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 \leq (x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4) ,$$

так как если раскрыть в правой части скобки, то получатся все члены, стоящие в левой части, и еще несколько неотрицательных членов.

Теперь достаточно применить к двум числам, $u = x_1 + x_3 + x_5 \geq 0$ и $v = x_2 + x_4 \geq 0$, составляющим в сумме единицу, неравенство $\sqrt{uv} \leq \frac{u+v}{2}$ между геометрическим и арифметическим средними, получим

$$(x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4) = uv \leq (u+v)^2/4 = \frac{1}{4} .$$

∇ Аналогично можно доказать, что для любых n неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, дающих в сумме 1, наибольшее значение величины $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$ равно $1/4$.

Задача **4-15.** Для доказательства сравним левую и правую части данного в условии неравенства с выражением $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$: докажем, что

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab.$$

Сложив почленно три верных неравенства $a^4 + b^4 - 2a^2b^2 \geq 0$, $b^4 + c^4 - 2b^2c^2 \geq 0$, $c^4 + a^4 - 2a^2c^2 \geq 0$, получаем

$$2\left(a^4 + b^4 + c^4\right) \geq 2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2\right).$$

Сложив почленно три верных неравенства $a^2\left(b^2 + c^2 - 2bc\right) \geq 0$, $b^2\left(a^2 + c^2 - 2ac\right) \geq 0$, $c^2\left(b^2 + a^2 - 2ba\right) \geq 0$, получаем

$$2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2\right) \geq 2\left(a^2bc + b^2ac + c^2ab\right).$$

∇ С неравенством из задачи 4-15 связана следующая общая **теорема Мюрхеда**. Пусть дан одночлен $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Назовем его *симметризацией* многочлен $\Phi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$, равный среднему арифметическому всевозможных одночленов, полученных из данного перестановкой переменных; например $\Phi_{2,2,0}(x, y, z) = \frac{1}{3}\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right)$. Рассмотрим два набора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ показателей $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n \geq 0$ и $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_n \geq 0$.

Для того чтобы при всех неотрицательных значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполнялось неравенство

$$\Phi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} \geq \Phi_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n},$$

необходимо и достаточно, чтобы набор α *мажорировал* набор β в следующем смысле:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \geq \beta_1,\\
&\alpha_1 + \alpha_2 \geq \beta_1 + \beta_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} \geq \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1},\\
&\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \geq \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n.
\end{aligned}$$

Эту систему условий коротко записывают так:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \succ (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

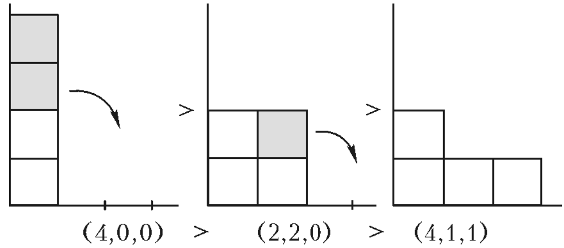

Рис. 48

Она имеет такую наглядную интерпретацию: если наборы показателей изображать в виде лестниц, у которых ширина ступеней равна 1, а высота – числам набора, то второй набор должен получаться из первого отрезанием кусочков ступеней и перебрасыванием их направо вниз (на одну из следующих ступеней). В задаче 4-15 (рис.48) из набора $(4, 0, 0)$ получается $(2, 2, 0)$, а из него – $(2, 1, 1)$:

$$(4, 0, 0) \succ (2, 2, 0) \succ (2, 1, 1).$$

Операция «перебрасывания ступенек» подсказывает путь к доказательству любого из неравенств, о которых идет речь в теореме Мюрхеда (см. [102]).

Фигуры из нескольких клеток, имеющие форму лестниц, оказываются удобными во многих других комбинаторных и алгебраических задачах (см. задачу 6-10).

Задача **4-16.** Чтобы избавиться от радикалов, положим $x = b^{1/15}$, $y = a^{1/10}$. Тогда данное неравенство примет вид

$$3x^5 + 2y^5 - 5x^3y^2 \ge 0.$$

Разделив обе части неравенства на y^5 и обозначив x/y через t, получим эквивалентное неравенство

$$3t^5 - 5t^3 + 2 \ge 0.$$

Левая часть разлагается на множители:

$$(t-1)^2\left(3t^3 + 6t^2 + 4t + 2\right) \ge 0.$$

При $t > 0$ оба множителя неотрицательны, поэтому неравенство справедливо. Оно обращается в равенство только при $t = 1$, т.е. при $a^3 = b^2$.

∇ Можно доказать исходное неравенство, воспользовавшись неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим для пяти чисел:

$$\left(\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} + \sqrt{a} + \sqrt{a}\right)\big/5 \ge \sqrt[5]{\left(\sqrt[3]{b}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{a}\right)^2} = \sqrt[5]{ab}.$$

Аналогично можно доказать, что для любых k положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и натуральных $p_1, p_2, \ldots, p_k$ с суммой $p_1 + \ldots + p_k = p$

$$p_1 a_1^{1/p_1} + p_2 a_2^{1/p_2} + \ldots + p_k a_k^{1/p_k} \ge p\left(a_1 a_2 \ldots a_k\right)^{1/p}.$$

А вот еще одно доказательство (приводящее к иному обобщению). Положив $a = y^5$, $b = x^5$, приведем исходное неравенство к виду

$$3\sqrt[3]{x^5}\big/5 + 2\sqrt{y^5}\big/5 \ge xy.$$

Это – частный случай *неравенства Юнга*: для любых положительных x, y, α, β, где $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$,

$$\frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{y^\beta}{\beta} \ge xy.$$

Это, в свою очередь, – частный случай неравенства

$$f(x) + g(y) \ge xy, \qquad (*)$$

где f и g – дифференцируемые функции, определенные при всех неотрицательных значениях аргумента, для которых f' и g' – взаимно обратные монотонно возрастающие функции, причем

$$f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = 0$$

(функции f и g называются *двойственными по Юнгу*).

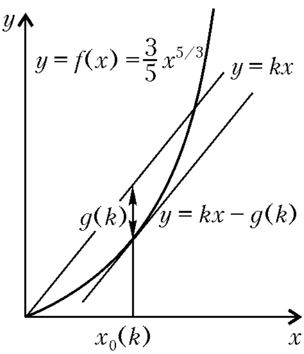

Рис. 49

Заметим, что для каждого значения y найдется ровно одно значение x, при котором неравенство $(*)$ обращается в равенство; для этих значений $y = f(x)$ и $x = g'(y)$. Поэтому функцию g можно определить через функцию f так: для каждого k

$$g(k) = \max_x\left(kx - f(x)\right).$$

Такой переход от функции f к функции g называется *преобразованием Лежандра* функции f. При этом функция f будет, в свою очередь, преобразованием Лежандра от функции g – см. рисунок 49 (см. [79]).

Задача **4-17.** Проведем три диагонали AD, BE и CF шестиугольника $ABCDEF$, соединяющие каждую вершину с противоположной. Пусть они пересекаются в точках K, L, M – см. рисунок 50,a; в частном случае точки K, L и M могут совпадать. Рассмотрим шесть треугольников, которые вместе с треугольником KLM составляют шестиугольник $ABCDEF$ – на нашем рисунке это треугольники ABL, BCL, CDM, DEM, EFK, FAK

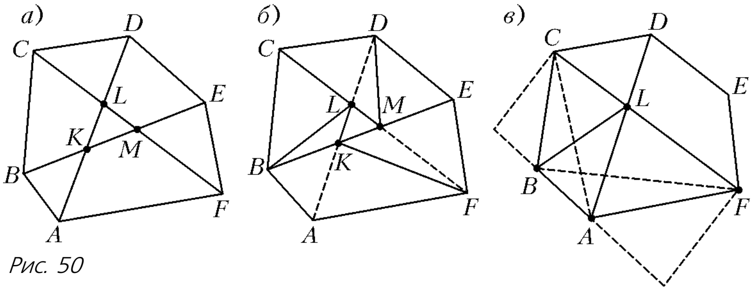

Рис. 50

(рис.50,*б*). Площадь хотя бы одного из них не больше $S/6$, где S − площадь шестиугольника (иначе сумма этих шести площадей была бы больше S, что невозможно). Пусть, например, $S_{ABL} \le \frac{S}{6}$ (рис.50,*в*). Мы утверждаем, что тогда площадь одного из треугольников ABC и ABF с тем же основанием AB, не больше $\frac{S}{6}$. В самом деле, площадь треугольника с основанием AB и высотой h равна $AB \cdot h/2$, а высота треугольника ABL заключена между высотами треугольников ABC и ABF, т.е. не больше одной из них.

∇ В последнем рассуждении можно выделить часто встречающееся соображение: наибольшее значение линейной функции $f(x)$, заданной на некотором промежутке $[a; b]$, всегда достигается в одном из концов промежутка, т.е. для любого x значение $f(x)$ не превосходит $f(a)$ или $f(b)$. В нашей задаче такой функцией была площадь треугольника $f(h) = AB \cdot h/2$.

Задача **4-18.** Пусть $\alpha \le \beta \le \gamma$. Считая α и β фиксированными, рассмотрим производную по γ разности правой и левой частей. Она равна

$$\left(3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} - \sin\gamma\right)' = \cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} - \cos\gamma \ge 0 ,$$

поскольку $0 \le \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \le \gamma \le \pi$ и $t \in [0; \pi]$ функция $y = \cos t$ убывает (производные постоянных величин $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ равны 0). Если мы докажем справедливость нашего неравенства при $\gamma = \beta$, то оно будет справедливо и при $\gamma \ge \beta$ − с ростом γ разность правой и левой частей неравенства будет возрастать.

Итак, осталось доказать, что при всех α и β , $\alpha \le \beta$,

$$\sin\alpha + 2\sin\beta \le 3\sin\frac{\alpha+2\beta}{3} .$$

Повторим то же рассуждение. Производная по β разности правой и левой частей равна

$$2\cos\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)-2\cos\beta \ge 0\ ,$$

поскольку $0 \le \frac{\alpha+2\beta}{3} \le \beta \le \pi$. Но при $\beta=\alpha$ неравенство превращается в равенство. Поэтому оно верно при $\beta \ge \alpha$.

∇ Взяв в условии задачи $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ или $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$, мы получим неравенства, эквивалентные тому, что периметр и площадь любого треугольника не больше, чем у правильного треугольника с тем же радиусом описанной окружности.

Метод, которым решена эта задача, позволяет доказать следующую общую теорему. Пусть на отрезке $[a; b]$ задана функция $f(x)$, производная которой $f'(x)$ не возрастает (такая функция называется выпуклой вверх). Тогда для любых n точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на этом отрезке и для любых n положительных чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ с суммой $p_1+\ldots+p_n=1$ верно следующее *неравенство Иенсена*:

$$f(p_1x_1+\ldots+p_nx_n) \ge p_1f(x_1)+\ldots+p_nf(x_n)\ .$$

В нашей задаче $f(x)=\sin x$, $x\in[0;\pi]$, а $p_1=p_2=p_3=1/3$.

Если взять функцию $f(x)=\ln x$ и $p_1=p_2=\ldots=p_n=1/n$, то получится неравенство

$$\ln\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \ge \frac{\ln x_1+\ldots+\ln x_n}{n}\ ,$$

или

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1\ldots x_n}\ ,$$

– классическое неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим n чисел ($x_1>0, \ldots, x_n>0$).

Для функции $f(x)=-x^2$ получится неравенство

$$(p_1x_1+\ldots+p_nx_n)^2 \le p_1x_1^2+\ldots+p_nx_n^2\ ;$$

а из него, положив $x_k=a_k/b_k$, $p_k=b_k^2\Big/\left(b_1^2+\ldots+b_n^2\right)$, можно вывести *неравенство Коши – Буняковского*:

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$$

согласно которому скалярное произведение двух векторов не больше произведения их длин (в нашем доказательстве было важно, что все b_k отличны от нуля, но последнее неравенство справедливо, очевидно, и без этого предположения) – см. [80].

Задача **4-19.** *Ответ*: $3\sqrt{3}/4$. (Эту площадь имеет трапеция, у которой боковые стороны и одно из оснований равны 1, а другое – 2.)

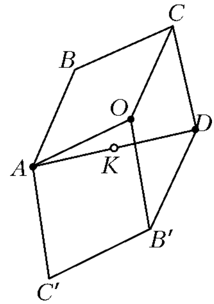
Рис. 51

Пусть в четырехугольнике $ABCD$ (который, очевидно, можно считать выпуклым) $AB = BC = CD = 1$ и K – середина стороны AD – см. рисунок 51. Дополнив ломаную $ABCD$ симметричной ей относительно точки K трехзвенной ломаной $DB'C'A$, мы получим центрально-симметричный шестиугольник, все стороны которого равны 1. Его можно разбить на три ромба $ABCO$, $CDB'O$, $B'C'AO$, и площадь его равна $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$, где α, β и γ – углы между отрезками OA, OC и OB', в сумме дающие 2π. Согласно предыдущей задаче эта площадь не больше $3\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, причем равенство возможно, когда $\alpha = \beta = \gamma = 2\pi/3$, т.е. когда построенный шестиугольник – правильный.

∇ Можно доказать, что наибольшим по площади среди всех n-угольников с заданными длинами $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ последовательных сторон (кроме одной, AZ) будет тот, у которого все вершины лежат на полуокружности с диаметром AZ. Это – вариант «*задачи Дидоны*» о том, какую наибольшую площадь, примыкающую к заданной прямой, можно огородить линией данной длины с концами на этой прямой (такой линией будет полуокружность).

Если же известны все длины сторон n-угольника, то наибольшим по площади будет (единственный – если порядок сторон фиксирован) вписанный в окружность. Соответственно, наибольшую площадь среди всех фигур данного периметра имеет круг (*изопериметрическая теорема*, см. [35]).

Задача **4-20.** *Ответ*: $\sqrt{3}/2$.

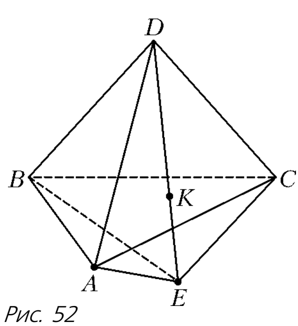
Рис. 52

Выпуклый многогранник с 5 вершинами не может быть ничем иным, кроме объединения двух тетраэдров (треугольных пирамид) с общим основанием (рис. 52). В самом деле, у него найдется такая вершина, из которой выходят 4 ребра ко всем остальным вершинам (если бы из каждой вершины исходило только 3 ребра, то всего было бы $5 \cdot 3 = 15$ концов ребер, а это число равно удвоенному числу всех ребер и должно быть четно). Если AB, AD, AC и AE – четыре последовательных ребра четырехгранного угла с вершиной A, то наш многогранник – объединение тетраэдров $ABCD$ и $ABCE$ с общим основанием ABC. Оценим объем многогранника:

$$V = S\left(h_E + h_D\right)/3 ,$$

где h_D и h_E – высоты тетраэдров, опущенные соответственно из вершин D и E на основание ABC, S – площадь треугольника ABC.

Пусть K – точка пересечения отрезка DE с плоскостью ABC; тогда $h_D + h_E \le DK + KE = DE \le 2$, поскольку расстояние между любыми двумя точками на сфере не больше ее диаметра.

Пусть R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC (т.е. сечения сферы плоскостью ABC). Тогда (см. задачу 4-18 или 4-19)

$$S \le 3\sqrt{3}R^2/4 \le 3\sqrt{3}/4 ,$$

поскольку радиус любого сечения сферы не больше радиуса сферы. Итак, $V \le \sqrt{3}/2$, причем $V = \sqrt{3}/2$ в случае, когда ABC – правильный треугольник, вписанный в экватор, а D и E – полюсы сферы.

∇ Общая задача: среди всех вписанных в сферу многогранников с n вершинами найти многогранник максимального объема – очень трудна.

Можно показать, что для $n = 6$ таким многогранником будет правильный октаэдр, но для $n = 8$ многогранником наибольшего объема будет не куб. Для плоского аналога этой задачи дело обстоит значительно проще: наибольшим по площади вписанным в данную окружность n-угольником для каждого n является, очевидно, правильный (это – простое следствие выпуклости синуса на отрезке от 0 до π, см. обсуждение задачи 4-18).

Задача **4-21.** Рассмотрим единичные квадраты центрами во всех узлах сетки, находящихся внутри круга радиуса 10 (стороны квадратов параллельны линиям сетки).

Поскольку длина диагонали такого квадрата равна $\sqrt{2} < 2$, все эти квадраты покрывают круг радиуса 9, концентрический с данным кругом. Поэтому сумма их площадей (численно равная количеству узлов сетки) больше 81π – площади круга радиуса $81\pi > 251$.

∇ Можно сформулировать более общую задачу: оценить число решений в целых числах x, y неравенства $x^2 + y^2 < n$ (в нашей задаче

$n = 100$). Из нашего рассуждения следует, что число решений не меньше $\pi\left(\sqrt{n}-1\right)^2$ (см. [91]).

Задача **4-22.** *Ответ*: нельзя.

Проведем сферу радиуса R с центром в данной точке O. Для каждого луча построим коническую поверхность с вершиной O, осью которой служит этот луч, а угол образующей с осью составляет $30°$ °; рассмотрим «шапочку» – часть сферы, лежащую внутри этого конуса. Площадь этой «шапочки» (сферического сегмента) равна $2\pi Rh$, где h – высота «шапочки»:

$$h = R(1-\cos 30°) = R\left(1-\sqrt{3}/2\right),$$

поэтому отношение площади «шапочки» к площади $4\pi R^2$ всей сферы равно

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > \frac{1}{15}.$$

(Последнее неравенство эквивалентно таким: $\left(2-\sqrt{3}\right)15 > 4$, $26 > 15\sqrt{3}$, $26^2 = 276 > 15^2 \cdot 3 = 675$.)

Таким образом, некоторые две из 15 «шапочек», соответствующих 15 лучам, обязательно будут пересекаться, а следовательно, некоторые два луча образуют угол меньше $60°$.

∇ Можно поставить более общий вопрос: какое наибольшее значение a_n может принимать наименьший из углов между n лучами, выходящими из одной точки пространства (или, что эквивалентно, какой наибольший размер могут иметь n одинаковых непересекающихся «шапочек» на сфере)? Точный ответ на этот вопрос известен лишь для $n \le 9$ и $n = 12$, хотя для многих значений n получены хорошие оценки для величины α_n – см. [116].

Задача **4-23.** Отметим на окружностях точки: на первой – A, на второй – B. Положение второй окружности относительно первой при их наложении будем задавать угловой величиной t дуги $\overset{\frown}{AB}$, $0° \le t < 360°$ (отсчет идет против часовой стрелки).

Назовем значение t запрещенным, если при соответствующем ему расположении окружностей хотя бы одна пара отмеченных дуг пересекается.

Рассмотрим некоторую дугу в $25°$ и некоторую дугу в $30°$. Они пересекаются на некотором отрезке значений t величиной $55°$. Всего таких запрещенных отрезков не больше чем пар дуг, т.е. $3 \cdot 2 = 6$. Поэтому множество запрещенных значений t имеет общую величину не больше $6 \cdot 55° = 330°$ и не покрывает все множество значений t – от $0°$ до $360°$. Значит, есть и незапрещенные значения t, при которых никакая пара дуг не пересекается.

∇ Аналогично можно доказать, что если на одной единичной окружности отмечены неперекрывающиеся дуги $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, а на другой – дуги $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, причем

$$m(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) + n(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m) < 360°,$$

то окружности можно совместить так, чтобы отмеченные дуги не пересекались.

Интересен и в некотором смысле «обратный» вопрос: при каких условиях на числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ можно расположить соответствующие дуги так, чтобы при любом наложении окружностей некоторые дуги перекрывались?

Отметим еще, что метод нашего решения задачи 4-23 можно назвать непрерывным аналогом принципа Дирихле (см. задачу 2-9); и недостаток у них общин: этот метод не показывает, как найти требуемый способ наложения.

Задача **4-24.** Проведем взвешивание гирек в три этапа.

1. Возьмем две гирьки из пяти и сравним их. Пусть их массы оказались a и b, причем $a < b$. Возьмем еще две гирьки и сравним их: $c < d$. Затем сравним более тяжелые гирьки этих пар; можно считать, что $b < d$.

2. Найдем место пятой гирьки с массой e среди тройки $a < b < d$. Для этого достаточно двух взвешиваний: сначала надо сравнить e с b, затем е нужно сравнить с a, если $e < b$, и с d, если $e > b$. Теперь мы знаем, как упорядочены четыре гирьки a, b, d и e.

3. Найдем место гирьки c среди тройки гирек a, b, e; на это также уйдет два взвешивания. Поскольку после этапа 1 мы знаем, что $c < d$, тем самым мы найдем место c среди четырех остальных гирек.

На этапе 1 мы произвели три взвешивания, на этапах 2 и 3 – по два взвешивания, т.е. всего 7 взвешиваний.

∇ Докажем, что меньше чем за 7 взвешиваний упорядочить 5 гирек нельзя. В самом деле, всего имеется $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ вариантов упорядочения пяти гирек. Каждое взвешивание имеет два исхода. Поэтому p взвешиваний могут осуществить выбор не более чем из 2^p вариантов. (В худшем для нас случае после очередного взвешивания число возможных вариантов сокращается не более чем вдвое.) Поэтому, чтобы 5 гирек можно было упорядочить за p взвешиваний, должно выполняться неравенство $2^p \geq 120$, или $p \geq \log_2 120$, откуда $p \geq 7$.

В общем случае для упорядочения n гирек заведомо нужно не менее чем $\log_2(n!)$ взвешиваний.

Общая задача о наименьшем числе $F(n)$ взвешиваний, за которое можно упорядочить n гирек, полностью далеко не решена и вызывает у специалистов по программированию большой интерес.

Придумано несколько общих способов упорядочения n гирек, однако при больших n число взвешиваний во всех этих способах превышает число $[\log_2 n!]+1$. Самый простой из них – это так называемый *алгоритм «бинарных вставок»*. На k-м этапе этого алгоритма ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) берется какая-нибудь новая (k + 1)-я гирька и ей находится место среди цепочки уже упорядоченных k гирек. Сначала она сравнивается по массе с гирькой, стоящей в середине этой цепочки, затем – с гирькой в середине той половины цепочки, в которой она оказалась, и т.д. На k-й этап тратится не более чем $[\log_2 k]+1$ взвешиваний. Таким образом, мы можем упорядочить n гирек не более чем за

$$(1+\log_2 2)+(1+\log_2 3)+\ldots+\left(1+\log_2(n-1)\right)<n(1+\log_2 n)$$

взвешиваний.

Итак, наименьшее число $F(n)$ взвешиваний удовлетворяет неравенствам

$$\log_2(n!)\le F(n)<n(1+\log_2 n).$$

Лишь при $n \le 4$ алгоритм «бинарных вставок» дает правильные значения $F(n)$: $F(2)=1$, $F(3)=3$, $F(4)=5$. Для случая n = 5 он требует 8, а не $F(5)=7$ взвешиваний. Обобщение того способа взвешиваний, который был указан в решении задачи про пять гирек (алгоритм сортировки «вставками и слиянием» [94]), дает наименьшее возможное число $F(n)$ взвешиваний при $n \le 12$ и n = 20, 21, но и он (как сообщил нам В.С.Гринберг) не является оптимальным при всех n.

Задачи для самостоятельного решения

4-25. Пусть a и b – длины катетов, а c и h – длины гипотенузы и опущенной на нее высоты прямоугольного треугольника. Какое наибольшее значение может принимать величина $(c+h)/(a+b)$?

4-26. Про квадратный трехчлен $f(x)=ax^2-ax+1$ известно, что $|f(x)|\le 1$ при $0\le x\le 1$. Найдите наибольшее возможное значение a.

4-27. Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше: доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?

4-28. Сумма десяти различных натуральных чисел равна 1986. Какое наибольшее значение может при этом принимать сумма трех наименьших из них?

4-29. Докажите, что если величины углов выпуклого пятиугольника составляют арифметическую прогрессию, то каждый из них больше $36°$.

4-30. Внутри треугольника площади 1 берется произвольная точка и через нее проводятся прямые, параллельные сторонам треугольника. В результате треугольник разбивается на 6 частей. Занумеруем площади этих частей в порядке возрастания: $S_1 \le S_2 \le \ldots \le S_6$. Какие значения может принимать каждая из этих шести величин?

4-31. Площадь четырехугольника равна 1. Какую наименьшую величину может иметь сумма его диагоналей?

4-32. 9 одинаковых авторучек стоят 11 рублей с копейками, а 13 таких же авторучек – 15 рублей с копейками. Сколько стоит одна авторучка?

4-33. Найдите наименьшее натуральное n, для которого существует такое натуральное m, что

$$\frac{220}{127} < \frac{m}{n} < \sqrt{3}.$$

4-34. Два промышленных предприятия, «Малыш» и «Карлсон», могут работать на любом из трех видов топлива: нефти, угле, газе. Запасы нефти таковы, что «Малыш» может проработать на имеющейся нефти 16 месяцев, а «Карлсон» – 9 месяцев. Угля хватило бы «Малышу» на 11 месяцев, а «Карлсону» – на 7 месяцев. Газ «Малыш» расходовал бы 5 месяцев, а «Карлсон» – 3 месяца. Какое наибольшее время смогут проработать оба предприятия на этих запасах топлива? (Начинают и кончают работать оба предприятия одновременно.)

4-35. По шоссе в одном направлении с постоянной скоростью через равные интервалы времени идут без остановок автобусы. Один человек прошел по шоссе 4 км, и за это время его обогнали 6 автобусов. В другой раз он прошел 7 км, и за это время его обогнали 8 автобусов. В третий раз он прошел 17 км. Сколько автобусов при этом могло его обогнать? (Все три раза человек шел с одной и той же скоростью.)

4-36. Найдите все решения системы уравнений

$$x + y = 2,$$
$$xy - z^2 = 1.$$

4-37. Найдите 11 чисел, каждое из которых равно квадрату суммы десяти остальных.

4-38. При каком натуральном n величина $\dfrac{n^2}{(1{,}001)^n}$ принимает наибольшее значение?

4-39. При каких значениях n можно подобрать n чисел так, что сумма всех попарных произведений этих чисел равна 1, а сумма квадратов всех этих чисел меньше чем 0,01?

4-40. Докажите, что при всех положительных a, b, c выполняется неравенство

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq a^2b^2c + a^2c^2b + b^2c^2a .$$

4-41. Докажите, что при $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < b < 1$ верно неравенство

$$\int_0^a \sin x\, dx + \int_0^b \arcsin x\, dx \geq ab .$$

4-42. Пусть a, b, c –стороны треугольника, P и S – его периметр и площадь соответственно. Докажите неравенства:

а) $P^2/3 \leq a^2 + b^2 + c^2 < P^2/2$;

б) $S < (ab + bc + ca)/6$.

4-43. Что больше:

а) 3^{500} или 7^{300}; б) $2^{3^{100}}$ или $3^{2^{150}}$;

в) $\log_5 6$ или $\log_6 7$; г) $\sin 6°/\sin 5°$ или $\sin 7°/\sin 6°$;

д) $\operatorname{tg} 6°/\operatorname{tg} 5°$ или $\operatorname{tg} 7°/\operatorname{tg} 6°$?

4-44. Докажите, что:

а) для любых положительных чисел x, y, z

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{9}{3+x+y+z} .$$

б) для любых чисел α, β, γ, заключенных между 0 и π,

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \leq \sin^3 \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} .$$

4-45. Представьте число 100 в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.

4-46. Какую наибольшую площадь может иметь пятиугольник, длины четырех сторон которого равны 1?

4-47. Можно ли в круге радиуса 10 разместить 300 точек так, чтобы попарные расстояния между ними были не меньше 1?

4-48. На одной из двух одинаковых окружностей отмечены 50 красных точек, на другой – несколько синих дуг, сумма длин которых меньше, чем $1/50$ длины окружности. Докажите, что можно так наложить первую окружность на вторую, что ни одна из красных точек не окажется ни на одной из синих дуг.

4-49. На катетах a и b прямоугольного треугольника выбираются точки P и Q, из которых опускаются перпендикуляры PK и QH на гипотенузу. Найдите наименьшее значение суммы

$$KP + PQ + QH.$$

4-50. Два крейсера идут по морю с постоянными скоростями. В 8.00 расстояние между ними было 20 миль, в 8.35 – 15 миль, в 8.55 – 13 миль. В какой момент времени они будут находиться на кратчайшем расстоянии друг от друга? Каково это расстояние? (Море считается плоским, а крейсеры – точками.)

§ 5. НЕОБЫЧНЫЕ ПРИМЕРЫ И КОНСТРУКЦИИ

5-1. Поезд двигался в одном направлении 5,5 ч. Известно, что за любой отрезок времени длительностью в один час он проезжал ровно 100 км.

а) Верно ли, что поезд ехал равномерно?

б) Верно ли, что средняя скорость поезда равна 100 км/ч?

5-2. Один человек каждый месяц записывал свой доход и расход. Может ли быть так, что за любые пять идущих подряд месяцев его общий расход превышал доход, а в целом за год его доход превысил расход?

5-3. Можно ли число 203 представить в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы и произведение всех этих чисел тоже было равно 203?

5-4. Верно ли следующее утверждение: из любых шести натуральных чисел можно выбрать либо три попарно взаимно простых числа, либо три числа, имеющих общий делитель, больший единицы?

5-5. Верны ли следующие утверждения:

а) из любых пяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать какие-нибудь три, стоящие в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания;

б) из любых девяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать какие-нибудь четыре, стоящих в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания?

5-6. а) Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их кубов быть больше 1?

б) Тот же вопрос для чисел, каждое из которых вдобавок меньше 1.

5-7. Пусть $f(x)$ − функция, непрерывная в каждой точке отрезка [0; 1] и такая, что $f(0)=f(1)$. Верно ли, что график этой функции имеет хорду, параллельную оси абсцисс:

а) длины $1/5$; б) длины $2/5$?

(Хорда графика − отрезок с концами на графике.)

5-8. Может ли так быть, что длины всех сторон одного треугольника меньше 1 см, длины всех сторон другого треугольника больше 100 м, а площадь первого треугольника больше площади второго?

5-9. Может ли так быть, что:

а) длины всех трех высот треугольника меньше 1 см, а его площадь больше 100 $см^2$;

б) длины всех трех высот треугольника больше 2 см, а его площадь меньше 2 $см^2$?

5-10. Верно ли следующее утверждение: для любой точки, лежащей внутри выпуклого четырехугольника, сумма расстояний от нее до вершин четырехугольника меньше его периметра?

5-11. Можно ли разрезать равнобедренный прямоугольный треугольник на несколько подобных ему треугольников так, чтобы среди них не было равных?

5-12. Можно ли из трех стержней и нескольких ниток изготовить жесткую пространственную конструкцию так, чтобы стержни не соприкасались между собой, а были бы только связаны нитками, прикрепленными к их концам?

5-13. Можно ли в деревянном кубе проделать такую дыру, через которую можно протащить такой же куб?

5-14. Существует ли многогранник (не обязательно выпуклый), у которого столько же ребер, вершин и граней, сколько их у куба, но у которого нет четырехугольных граней?

5-15. Можно ли расположить на плоскости шесть точек и соединить их непересекающимися отрезками так, чтобы каждая точка была соединена ровно:

а) с тремя; б) с четырьмя другими точками?

5-16. Существует ли замкнутая ломаная, которая пересекает каждое свое звено ровно один раз и состоит из:

а) 6 звеньев; б) 7 звеньев?

5-17. Имеется много одинаковых круглых монет. Можно ли расположить на плоскости:

а) 24; б) 25

из них так, чтобы каждая касалась трех других?

5-18. Про некоторую компанию известно, что в ней каждые два не знакомых друг с другом человека имеют ровно двух общих знакомых, а каждые два знакомых не имеют общих знакомых. Может ли такая компания насчитывать более четырех человек?

5-19. Три друга сыграли несколько партий в шахматы, причем каждые двое сыграли одинаковое количество партий друг с другом. Потом они стали решать, кто из них оказался победителем. Первый сказал: «У меня больше выигрышей, чем у каждого из вас». Второй сказал: «У меня меньше проигрышей, чем у каждого из вас». Третий промолчал, но когда подсчитали очки, то оказалось, что больше всего очков набрал именно