где

$$\Delta_3 = -\begin{vmatrix} 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & 1 \\ r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 & 1 \\ r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2r_{13}^2 r_{23}^2 + 2r_{12}^2 r_{23}^2 + 2r_{12}^2 r_{13}^2 - r_{12}^4 - r_{13}^4 - r_{23}^4$$

(см. [83, 86]).

Задача **3-18.** *Ответ*: 5, 8, 9, 10 или 11.

На рисунке 37 показаны примеры деления на 5, 8, 9, 10, 11 частей. Докажем, что не может быть иного числа частей.

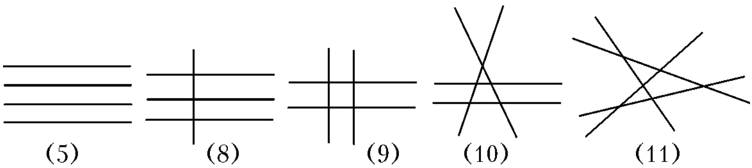

Рис. 37

Если все прямые параллельны друг другу, то частей пять. Пусть не все прямые параллельны. Рассмотрим пару пересекающихся прямых – они делят плоскость на 4 угла. Каждая из вновь проведенных прямых пересекает не менее двух частей, на которые делят плоскость уже проведенные прямые, и делит каждую из этих частей на две. Поэтому каждая следующая прямая добавляет не менее двух новых частей. В частности, четыре прямые, среди которых есть непараллельные, делят плоскость не менее чем на $4 + 2 \cdot 2 = 8$ частей.

Теперь докажем, что частей не больше одиннадцати. Будем проводить прямые по очереди. Первые две прямые делят плоскость не более чем на четыре части. Третья прямая имеет не более чем две точки пересечения с прежними прямыми, делится ими не более чем на три части, и потому число частей увеличивается не более чем на три.

Четвертая прямая делится точками пересечения с предыдущими не более чем на четыре части и потому добавляет не более четырех новых частей.

Всего получается не более чем 4 + 3 + 4 = 11 частей.

∇ Эта задача естественно обобщается: на сколько частей могут делить плоскость n различных прямых?

Рассуждая подобно тому, как мы это делали выше, можно доказать, что число частей либо равно $(n+1)$, либо заключено в промежутке от $2n$ до $(n^2+n+2)/2$. Но, оказывается, не любое число частей в этом промежутке может быть реализовано. Например, 5 прямых не могут делить плоскость на $2 \cdot 5 + 1 = 11$ частей и, вообще, n прямых при $n \geq 5$ не могут делить плоскость на $(2n + 1)$ частей. Интересно было бы найти, какие числа из промежутка от $2n$ до $\left(n^2 + n + 2\right)/2$ могут реализоваться для n прямых.

Интересен также вопрос о том, на какие именно области разбивают плоскость n прямых общего положения (никакие три из которых не проходят через одну точку и никакие две не параллельны). Для $n = 4$ расположение прямых общего положения всегда будет таким, как на рисунке 37, т.е. среди трех конечных областей всегда один четырехугольник, два треугольника, среди восьми бесконечных − три угла, четыре «бесконечных» треугольника и один «бесконечный» четырехугольник. Для $n \geq 5$ возможны уже различные (по количеству треугольников и других областей) случаи.

Задача об оценке максимального числа треугольников в разбиении плоскости n прямыми, по существу, эквивалентна такой задаче В.И.Арнольда: пусть все $a_n = \left(n^2 + n + 2\right)/2$ области разбиения раскрашены двумя красками − черной и белой − так, что соседние области (граничащие по отрезку прямой или лучу) окрашены в разные цвета, причем количество черных областей равно b_n. Какое наибольшее значение может принимать отношение b_n/a_n ?

Можно доказать (пользуясь, например, теоремой Эйлера − см. задачу 5-15), что $b_n/a_n \leq 2/3$ (при любом n), причем в разбиении с наибольшим числом черных областей все (или почти все) они должны быть треугольниками.

Интересные факты содержатся в статье [127]. См. также [128], [129].

Задача **3-19.** *Ответ*: 4 плоскости делят пространство на 14 частей, 5 плоскостей − на 22 части.

Докажем это. Три плоскости $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ делят пространство на 8 частей. Когда мы проводим четвертую плоскость α_4, она пересекается с тремя предыдущими по трем прямым, проходящим через их общую точку. Эти прямые делят плоскость α_4 на 6 углов. Следовательно, из тех 8 частей, на которые пространство разбивалось плоскостями $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, четвертая плоскость α_4 пересекает 6 частей и делит каждую из них на 2 части. Таким образом, добавляется еще 6 частей, всего их становится 8 + 6 = = 14.

Точно так же пятая плоскость, пересекаясь с предыдущими по четырем прямым, добавляет $4 \cdot 2 = 8$ частей, и их становится 14 + 8 = 22.

∇ В общем случае для n плоскостей доказательство можно проводить аналогично: 6-я, 7-я, …, n-я плоскости добавляют соответственно $2\cdot 5, 2\cdot 6, \ldots, 2(n-1)$ новых частей, и всего их становится (удобно записать сумму с самого первого члена)

$$2+2\cdot 1+2\cdot 2+\ldots+2(n-1)\ .$$

Чтобы найти эту сумму, удобно складывать числа парами с разных концов:

$$2+\big(1+(n-1)\big)+\big(2+(n-2)\big)+\ldots+\big((n-1)+1\big)=$$

$$=2+(n-1)n=n^2-n+2\ .$$

Задачу 3-19 можно свести к плоской задаче 3-18 следующим образом: проведем вблизи одной из n плоскостей по одну и другую сторону параллельные ей плоскости. Тогда каждая из них будет разбита $(n-1)$ прямыми пересечения с остальными $(n-1)$ из данных плоскостей на $(1/2)\Big((n-1)^2+(n-1)+2\Big)=\dfrac{n^2-n+2}{2}$ частей (см. обсуждение задачи 3-18), и эти n^2-n+2 частей ровно по одной лежат в различных областях пространства.

Описание разбиений пространства n плоскостями, проходящими через одну точку O, очевидно, эквивалентно описанию разбиений сферы с центром O большими кругами. Например, 5 больших кругов общего положения всегда делят сферу на 10 треугольников, 10 четырехугольников и 2 пятиугольника.

При $n\geq 6$ возможны (как в предыдущей задаче 3-18 для $n\geq 5$) различные типы разбиений (см. [130], [131]).

Задача **3-20.** Найдем прямые пересечения плоскостей противоположных граней данного четырехгранного угла. Через эти две прямые проведем плоскость α. Затем проведем параллельную ей плоскость β, пересекающую все четыре ребра.

Докажем, что в сечении получится параллелограмм. Плоскость β параллельна прямой пересечения плоскостей двух противоположных граней, и, следовательно, она пересекает их по параллельным прямым. Таким образом, в сечении получился четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны, т.е. параллелограмм.

∇ Покажем теперь, как с помощью нашей конструкции можно связать две задачи 3-9 и 3-10 − см. рисунки 26, 38.

Рассмотрим четырехугольную пирамиду, основание которой является трапецией. Проведем сечение этой пирамиды плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм. Две противоположные стороны этого параллелограмма будут параллельны основаниям трапеции.

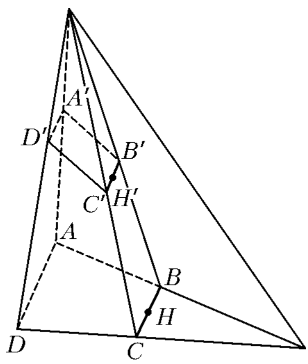

Рис. 38

При *центральном проектировании* (с центром в вершине четырехгранного угла) параллелограмм переходит в трапецию, а отношение отрезков на параллельных прямых сохраняется.

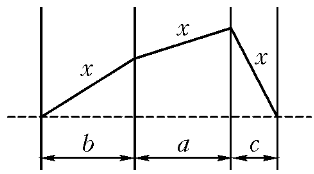

Рис. 39

Задача **3-21.** Рассмотрим развертку боковой поверхности призмы – см. рисунок 39. Существование нужного сечения эквивалентно существованию ломаной с вершинами на четырех параллельных прямых развертки, такой что все три ее звена имеют одинаковую длину x, а концы лежат на прямой, перпендикулярной этим параллельным прямым. Таким образом, достаточно доказать, что уравнение

$$\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = \sqrt{x^2 - c^2} \qquad (1)$$

имеет решение при $a \ge b \ge c > 0$, $a < b + c$.

Рассмотрим функцию

$$y = f(x) = \sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - b^2} - \sqrt{x^2 - c^2}.$$

Эта функция определена при $x^2 \ge a^2$ и непрерывна. Заметим, что $f(a) = \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - c^2} \le 0$, так как $b \ge c$, а

$$f\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right) = b + a - \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} > 0.$$

Если значения непрерывной функции на концах отрезка имеют разные знаки, то в некоторой точке внутри отрезка функция обращается в нуль. В нашем случае эти условия выполнены на отрезке $\left[a; \sqrt{a^2 + b^2}\right]$. Поэтому в некоторой точке x_0 внутри этого отрезка функция f обращается в нуль: $f(x_0) = 0$, и тем самым уравнение имеет решение.

∇ Решив уравнение (1), мы найдем формулу, с помощью которой ломаную можно построить циркулем и линейкой.

Задача **3-22.** *Ответ*: может.

Построим пример. Рассмотрим треугольную пирамиду, в основании которой – правильный треугольник, двугранные углы при основании острые, а боковые ребра различны. Из двух экземпляров такой пирамиды, склеив их по общему основанию, можно изготовить шестигранник (бипирамиду) тремя разными

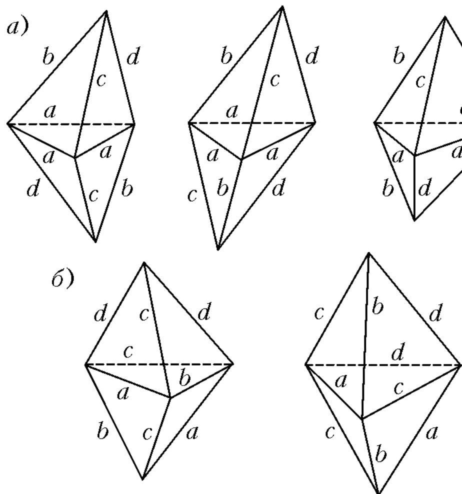

Рис. 40

способами – см. рисунок 40,*а*. Все они имеют одинаковый набор граней, но не равны друг другу. Еще один пример см. на рисунке 40,*б*.

∇ Если бы Андрей занумеровал все ребра и на каждой грани написал рядом с ребрами их номера, то Коля склеил бы точно такой же выпуклый многогранник: *если грани одного выпуклого многогранника соответственно равны граням другого выпуклого многогранника, то эти многогранники равны* (**теорема Коши** – см. [83, 99]).

Для невыпуклых многогранников теорема Коши перестает быть верной, Пример этому см. на рисунке 41.

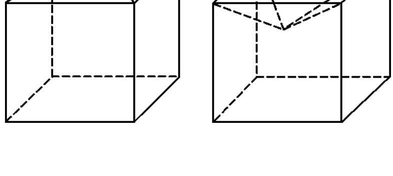

Рис. 41

С середины прошлого века стоял следующий вопрос: существует ли нежесткий многогранник, составленный из жестких, шарнирно соединенных граней – пластин? Только в 1977 г. американский математик Р.Конелли построил пример такого многогранника ([50, 83]).

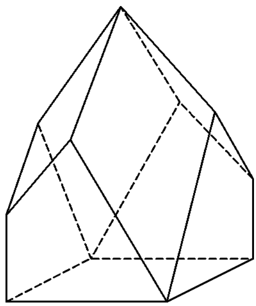
Рис. 42

Задача **3-23.** *Ответ*: да, существует.

Построим такой многогранник – см. рисунок 42. Рассмотрим четырехугольную пирамиду $ABCDE$, основание которой – ромб $ABCD$, а вершина E проектируется в центр ромба. Рассмотрим в плоскости основания квадрат A_1BC_1D с диагональю BD (BD – меньшая диагональ ромба) и куб, нижним основанием которого является этот квадрат. Возьмем пересечение куба с пирамидой и часть пирамиды, лежащую выше куба. В результате получим искомый многогранник.

∇ Знаток мог бы ответить на вопрос задачи 3-23 довольно просто. Достаточно нарисовать плоскую схему, изображенную на рисунке 43 и, сослаться на *теорему Штейница*, которая утверждает, что при естественных условиях на плоскую схему существует выпуклый многогранник, грани, ребра и вершины которого взаимосвязаны так же, как области, звенья и узлы этой схемы – сравните схему на рисунке 43 с рисунком 42 – см. [99].

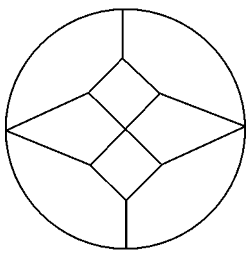
Рис. 43

Задача **3-24.** Пусть остроугольный треугольник $D_1D_2D_3$ со средними линиями AB, AC и BC (см. рис. 44) является разверткой треугольной пирамиды $ABCD$ (вершины D_1, D_2 и D_3 склеиваются в одну точку D). Если ребру соответствует половина стороны треугольника $D_1D_2D_3$, то скрещивающемуся с ним ребру соответствует средняя линия, параллельная этой стороне, и наоборот. Поэтому скрещивающиеся ребра пирамиды равны.

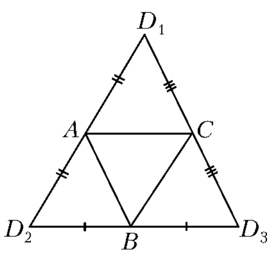

Рис. 44

Построим параллелепипед, четыре несмежные вершины которого являются вершинами треугольной пирамиды. Для этого проведем через каждое ребро пирамиды плоскость, параллельную скрещивающемуся с ним ребру. Получим три пары параллельных плоскостей, при пересечении которых образуется параллелепипед. Поскольку скрещивающиеся ребра исходной пирамиды равны, каждая грань параллелепипеда – параллелограмм с равными диагоналями, т.е. прямоугольник. Параллелепипед, у которого все грани – прямоугольники, является прямоугольным, что и требовалось доказать.

∇ Интересно, что верно и обратное утверждение.

Если вершины тетраэдра являются четырьмя несмежными вершинами некоторого прямоугольного параллелепипеда, то его развертка представляет собой остроугольный треугольник, в котором проведены средние линии. Действительно (рис.45), к каждой вершине примыкают три одинаковых треугольника, причем примыкают они тремя своими разноименными углами; тем самым сумма плоских углов в вершине тетраэдра равна $180°$.

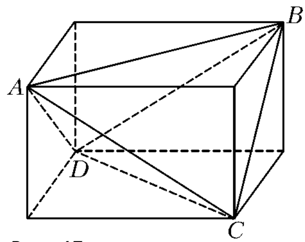

Рис. 45

Тетраэдр, у которого все грани – одинаковые, но не обязательно правильные треугольники, называется часто *равногранным тетраэдром*.

У такого тетраэдра:

1) скрещивающиеся ребра равны друг другу:

2) центры вписанной и описанной сфер совпадают;

3) проекция на каждую плоскость, параллельную двум скрещивающимся ребрам, – прямоугольник;

4) сумма плоских углов при каждой вершине равна $180°$;

5) каждый отрезок, соединяющий середины противоположных ребер, перпендикулярен этим ребрам, или, что то же самое, при повороте вокруг каждого такого отрезка на $180°$ тетраэдр совмещается с самим собой (эти отрезки – оси симметрии описанного вокруг него прямоугольного параллелепипеда);

6) три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер, взаимно перпендикулярны.

Интересно, что из каждого из этих свойств можно вывести все остальные.

Задача **3-25.** *Ответ*: $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$ и $\pi-\gamma$.

Выберем два из трех построенных лучей. Пусть перпендикулярные им грани образуют двугранный угол α. Его ребро перпендикулярно плоскости, в которой лежат выбранные лучи, поэтому он высекает на этой плоскости линейный угол α. Стороны этого линейного угла и выбранные лучи делят плоскость на четыре угла; один из них равен α, два соседние с ним

– прямые; оставшийся четвертый угол – угол между выбранными лучами – равен $\pi - \alpha$.

∇ Задача 3-25 показывает, как связаны плоские углы одного трехгранного угла с двугранными углами другого. Для трехгранных углов легко вывести *формулу косинусов*, которая дает возможность, зная его плоские углы A, B, C, найти двугранные углы; например, косинус двугранного угла γ может быть вычислен гак:

$$\cos\gamma = \frac{\cos C - \cos A \cos B}{\sin A \sin B}. \tag{1}$$

Гораздо труднее, на первый взгляд, решить обратную задачу; зная двугранные углы α, β, γ, найти косинусы плоских углов. Однако если воспользоваться построенным в задаче 3-25 новым трехгранным углом, то нужная формула получается автоматически.

Мы знаем из задачи, что если A, B, C – плоские углы, а α, β, γ – двугранные углы исходного трехгранного угла, то $\alpha' = \pi - A$, $\beta' = \pi - B$, $\gamma' = \pi - C$ – двугранные углы, а $A' = \pi - \alpha$, $B' = \pi - \beta$, $C' = \pi - \gamma$ – плоские углы нового трехгранного угла. Запишем формулу косинусов для нового трехгранного угла:

$$\cos\gamma' = \frac{\cos C' - \cos A' \cos B'}{\sin A' \sin B'}.$$

Тогда

$$\cos(\pi - C) = \frac{\cos(\pi-\gamma) - \cos(\pi-\alpha)\cos(\pi-\beta)}{\sin(\pi-\alpha)\sin(\pi-\beta)}$$

и

$$\cos C = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) называются еще *формулами косинусов для сферических треугольников*. Рассмотрим сферу единичного радиуса с центром в вершине трехгранного угла. Трехгранный угол высекает на этой сфере криволинейный треугольник. Его стороны – это дуги больших кругов радиуса 1, их длины равны соответственно величинам плоских углов A, B, C (взятым в радианах) трехгранного угла. Его углы – это двугранные углы α, β, γ трехгранного угла. Формула (1) позволяет находить по трем его сторонам его углы, а формула (2) – по трем его углам – стороны.

Построенный в задаче 3-25 трехгранный угол также высекает на сфере треугольник, который называется полярным к первому. В задаче установлено, как связаны друг с другом их стороны и углы.

Задачи для самостоятельного решения

3-26. Постройте циркулем и линейкой отрезки, заданные формулами (a, b, c, d, e – данные отрезки):

1) $\sqrt{ab}$; 2) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 3) ab/c;

4) $a\sqrt{2}\big/\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; 5) $(abc)/(de)$; 6) $a\sqrt[4]{2}$;

7) $\sqrt{a^2+ab+ac}$; 8) $\sqrt[4]{abcd}$; 9) $\sqrt[4]{a^3b+ab^3}$;

10) $\sqrt{\left(a^3/b\right)+\left(c^3/d\right)}$.

3-27. На прямой даны отрезки a и b ($b > a$). Постройте одним циркулем отрезки, заданные формулами:

1) $\sqrt{b^2-a^2}$; 2) $a\sqrt{3}$, 3) $a\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{b^2+a^2}$.

3-28. Постройте циркулем и линейкой треугольник по двум сторонам a и b ($b > a$), если известно, что угол против одной из них в два раза больше угла против другой.

3-29. Дана окружность и точка вне ее. Постройте с помощью циркуля и линейки секущую, проходящую через эту точку так, чтобы отрезок секущей вне окружности равнялся отрезку внутри нее.

3-30. В круге проведены два радиуса. Постройте циркулем и линейкой хорду, делящуюся этими радиусами на три одинаковые части.

3-31. С помощью циркуля и линейки в данный круговой сегмент впишите квадрат.

3-32. На координатной плоскости нарисована полуволна синусоиды ($0 \le x \le \pi$, $y = \sin x$). Постройте циркулем и линейкой прямоугольник заданного периметра P, две вершины которого лежат на синусоиде, а две другие – на оси Ox.

3-33. Даны два отрезка с длинами 1 и π. Постройте (циркулем и линейкой) квадрат, равновеликий данному кругу.

3-34. На координатной плоскости нарисован график функции $y = x^3$. Пользуясь этим графиком, циркулем и линейкой, разделите данный угол на три равные угла.

3-35. Два зеркала образуют острый угол. Луч света падает на одну из его сторон. Докажите, что, как бы мал ни был угол, после нескольких отражений луч из него выйдет.

3-36. Из одного угла прямоугольного бильярда размерами 19×86 под углом $45°$ выпущен шар. В какую из луз, расположенных по углам бильярда, попадет шар, и сколько раз он до этого отразится от бортов? (Шар и лузы считаются точками.)

3-37. На стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник. Найдите расстояние от его центра до вершины C, если длина стороны AB равна c и $\angle C = 120°$.

3-38. Постройте с помощью линейки с делениями через 1 см биссектрису данного угла.

3-39. Постройте с помощью циркуля и линейки правильный пятнадцатиугольник.

3-40. На плоскости взяты две точки A и B, расстояние между которыми – целое число m. Проведены все окружности целочисленных радиусов с центрами A и B. На полученной сетке отмечена последовательность узлов (точек пересечения окружностей), в которой каждые два соседних узла – противоположные вершины криволинейного четырехугольника.

а) Сделайте чертеж, взяв за единицу 0,5 см, а $n = 12$.

б) Докажите, что все точки этой последовательности лежат либо на одном эллипсе, либо на одной гиперболе.

3-41. а) Нарисуйте фигуру из трех отрезков на плоскости, которая имеет шесть осей симметрии.

б) Может ли объединение трех отрезков на плоскости иметь больше шести осей симметрии?

3-42. Дан треугольник ABC. Найдите на его сторонах AB и BC такие точки K и L, что:

а) $AK = KL = LB$; б) $AK = KL = LC$.

3-43. Дан отрезок и отмечена его середина. Постройте с помощью одной линейки прямую, проходящую через данную точку параллельно данному отрезку.

3-44. Даны две параллельные прямые и на одной из них – некоторый отрезок. С помощью линейки постройте отрезок, в два раза больший данного.

3-45. На сторонах остроугольного треугольника как на диаметрах построены три окружности. Докажите, что общие хорды каждых двух из этих окружностей являются высотами этого треугольника.

3-46. На каждой стороне остроугольного треугольника отмечается точка и соединяется с противоположной вершиной. На каждом из трех проведенных отрезков как на диаметре строится окружность. Проводятся общие хорды каждых двух из этих окружностей. Докажите, что эти хорды пересекаются в точке пересечения высот исходного треугольника.

3-47. Коля отметил на плоскости четыре точки, измерил все шесть расстояний между ними и сообщил Вите эти шесть чисел. Витя построил у себя на плоскости четыре точки с теми же попарными расстояниями. Обязательно ли Витину фигуру можно совместить с Колиной, если:

а) указаны только шесть чисел;

б) указано, какой паре точек соответствует каждое расстояние?

3-48. Пусть на плоскости проведено n различных прямых. Если через точку проходит k из этих прямых, то число $(k-1)$ назовем *кратностью* этой *точки*. Докажите, что проведенные прямые делят плоскость на $(n+m+1)$ частей, где m – сумма кратностей всех точек пересечения прямых.

3-49. а) *Пару чисел* $(n_1; n_2)$, где $n_1 \le n_2$, назовем *осуществимой*, если треугольник можно разрезать прямой, проходящей через его внутреннюю точку, на n_1-угольник и n_2-угольник. Сколько всего осуществимых пар?

б) *Четверку чисел* $(n_1; n_2; n_3; n_4)$, где $n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4$, назовем *осуществимой*, если треугольник можно разрезать парой прямых, проходящих через его внутреннюю точку, на n_1-угольник, n_2-угольник, n_3-угольник и n_4-угольник. Сколько всего осуществимых четверок?

3-50. Четыре плоскости делят пространство на 15 частей. Сколько из этих частей могут содержать шар, касающийся всех четырех плоскостей?

3-51. Каждое ребро тетраэдра разбито на 4 одинаковые части, и через все точки деления проведены плоскости, параллельные всем его граням. На сколько частей разбит тетраэдр?

3-52. На какое максимальное число частей могут разбивать пространство четыре сферы?

3-53. а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через его центр перпендикулярно какой-нибудь его диагонали.

б) Примем диагональ d куба за ось Ox (точка O –центр куба) и обозначим через $S(x)$ площадь сечения куба плоскостью, перпендикулярной диагонали d и проходящей через точку x диагонали. Постройте график функции $S(x)$.

3-54. У тетраэдра двугранные углы при любой паре противоположных ребер одинаковые. Верно ли, что противоположные ребра этого тетраэдра равны по длине?

3-55. Постройте шестигранник, у которого в каждой вершине сходятся три ребра, причем ровно две грани – пятиугольники.

3-56. Дана сфера единичного радиуса и трехгранный угол с вершиной в ее центре. Докажите, что площадь сферического треугольника – части сферы, лежащей внутри трехгранного угла, – равна $(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$, где α, β и γ – величины двугранных углов этого трехгранного угла (углы сферического треугольника).

§ 4. НЕРАВЕНСТВА, ЭКСТРЕМУМЫ, ОЦЕНКИ

4-1. В прямоугольном треугольнике a и b – его катеты, c – гипотенуза, h – высота, опущенная на гипотенузу. Докажите, что $c + h$ больше $a + b$.

4-2. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней, и $a + b + c < 0$. Какой знак имеет число c?

4-3. Дан прямоугольник $ABCD$. В нем берется произвольная точка, и через нее проводятся две прямые, параллельные его сторонам. Они разбивают прямоугольник на четыре меньших прямоугольника. Докажите, что хотя бы один из двух прямоугольников, содержащих точки A и C, имеет площадь, не большую $1/4$ площади всего прямоугольника.

4-4. В банк кладется 1000 руб. В каком случае спустя 10 лет вкладчик получит больше денег: если банк начисляет 5% от имеющейся суммы один раз в год или если он начисляет $5/12$% один раз в месяц?

4-5. Автобус считается переполненным, если в нем находится более пятидесяти пассажиров. Два инспектора ГАИ остановили колонну автобусов. Инспектор Подберезовиков подсчитал процент переполненных автобусов, а инспектор Подосиновиков подсчитал процент пассажиров, едущих в переполненных автобусах. У кого процент больше?

4-6. Какое наименьшее число участников может быть в математическом кружке, если известно, что девочки составляют в нем:

а) меньше 50%, но больше 40%; б) меньше 44%, но больше 43%?

4-7. У грузового автомобиля передние покрышки стираются через 15 000 км пути, а задние – через 25000 км. (На задних колесах по две покрышки, а на передних – по одной такой же покрышке.) Как нужно менять покрышки на колесах, чтобы проехать на одних и тех же покрышках наибольшее расстояние? Найдите это расстояние.

4-8. Малыш может съесть торт за 10 минут, банку варенья – за 13 минут и выпить кастрюлю молока за 14 минут, а Карлсон может сделать это за 6, 6 и 7 минут соответственно. За какое наименьшее время они могут покончить с завтраком, состоящим из торта, банки варенья и кастрюли молока?

4-9. Витя с Олей обычно встречаются на конечной станции метро. Пусть поезда метро отправляются через строго одинаковые интервалы времени. Первый раз Витя прождал Олю 12 минут, и за это время отправилось 5 поездов. Второй раз он прождал Олю 20 минут, и за это время отправилось 6 поездов. В третий раз он прождал Олю 30 минут. Сколько поездов могло отправиться за это время?

4-10. Несколько ящиков весят вместе 10 т, причем каждый из них весит не больше одной тонны. Какое наименьшее количество трехтонок заведомо достаточно, чтобы увезти за один раз весь этот груз?

4-11. Найдите три числа, каждое из которых равно квадрату разности двух других чисел.

4-12. Докажите, что для любых натуральных m и n, больших 1, хотя бы одно из чисел $\sqrt[n]{m}$ и $\sqrt[m]{n}$ не превосходит $\sqrt[3]{3}$.

4-13. При каком n величина

$$\frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \ldots \cdot \lg n}{10^n}$$

принимает наименьшее значение?

4-14. Известно, что числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 неотрицательны и $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$. Найдите наибольшее значение величины $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5$.

4-15. Докажите, что для любых a, b и c верно неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab.$$

4-16. Докажите, что при любых положительных a и b выполняется неравенство

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}.$$

4-17. Докажите, что в любом выпуклом шестиугольнике найдется диагональ, которая отрезает от него треугольник площади, не превосходящей $1/6$ площади шестиугольника.

4-18. Докажите, что для любых углов α, β, γ, заключенных между 0 и π, выполнено неравенство

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq 3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}.$$

4-19. Какую наибольшую площадь может иметь четырехугольник, длины трех сторон которого равны 1?

4-20. Выпуклый многогранник с пятью вершинами вписан в сферу радиуса 1. Найдите наибольший объем такого многогранника.

4-21. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 проведена окружность радиуса 10. Докажите, что внутри этой окружности лежит более 250 узлов сетки.

4-22. Можно ли из точки O направить в пространство 15 лучей так, чтобы угол между любыми двумя был больше $60°$?

4-23. На первой из двух одинаковых окружностей отмечены три дуги по $25°$ каждая, на второй – две дуги по $30°$ каждая. Докажите, что вторую окружность можно так наложить на первую, чтобы отмеченные дуги не пересекались.

4-24. Докажите, что пять гирек можно расположить в порядке возрастания их масс, проделав не более 7 взвешиваний на чашечных весах (позволяющих за одно взвешивание сравнивать массы двух гирек).

Обсуждение задач

Задача **4-1.** Подсчитывая двумя способами площадь треугольника, получим $ch = ab$, откуда $h = ab/c$. Неравенство $c + h > a + b$ запишем так:

$$c + \frac{ab}{c} > a + b\ .$$

Умножая обе части на c ($c > 0$), получим эквивалентное неравенство:

$$c^2 - c(a+b) + ab > 0\ ,$$

или

$$(c-a)(c-b) > 0\ .$$

Это неравенство верно, так как гипотенуза больше каждого катета.

∇ В решении этой задачи мы установили, что если произведения ch и ab двух пар положительных чисел одинаковы, то сумма больше у той пары, числа которой более «раздвинуты»: если a и b заключены между c и h, то $c + h > a + b$. Этот факт вытекает также из того, что функция $f(x) = x + A/x$ монотонно возрастает при $x \ge \sqrt{A}$.

Задача **4-2.** *Ответ*: $c < 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$. По условию она не обращается в нуль, поэтому ее график – парабола – расположен либо целиком выше оси Ox, либо целиком ниже.

Заметим, что $f(1) = a + b + c$; это число, по условию, меньше нуля, значит, парабола расположена ниже оси Ox. Поэтому $f(x) < 0$ при всех значениях x и, в частности, $f(0) = c < 0$.

∇ В решении мы, по существу, использовали непрерывность функции f: *если функция непрерывна на промежутке и не обращается на нем в нуль, то все ее значения на этом промежутке имеют один и тот же знак*.

Задача **4-3.** Проведем оси симметрии прямоугольника. Они разбивают данный прямоугольник на 4 четверти. Если выбранная точка лежит в какой-нибудь из двух четвертей, содержащих точки A и C, или на границе этих четвертей, то утверждение задачи очевидно.

Пусть выбранная точка лежит внутри одной из двух оставшихся четвертей. Отразим обе прямые разреза относительно центра симметрии прямоугольника. Четыре прямые (две линии разреза и две симметричные им) разбивают прямоугольник на 9 частей: четыре части – площади S_1 две части – площади S_2, две части – площади S_3 и одна часть – площади S_0 (рис.46). Мы должны доказать, что $S_1 + S_2$ или $S_1 + S_3$ не превосходит $S/4$, где 5 – площадь всего прямоугольника. Так как

S_1	S_3	S_1
S_2	S_0	S_2
S_1	S_3	S_1

Рис. 46

$$4S_1 + 2S_2 + 2S_3 = S - S_0 < S\ ,$$

то

$$2S_1 + S_2 + S_3 < S/2\ ,\ \text{или}\ \left(S_1 + S_2\right) + \left(S_1 + S_3\right) < S/2\ .$$

Значит, одно из чисел $S_1 + S_2$, $S_1 + S_3$ меньше $S/4$ (если бы оба они были не меньше $S/4$, то их сумма была бы не меньше $S/2$).

∇ Представляет интерес следующая стереометрическая задача, похожая на задачу 4-3: пусть $V_1 \le V_2 \le \ldots \le V_8$ – объемы восьми частей, на которые делят параллелепипед объема 1 три плоскости, проходящие через его точку и параллельные его граням; в каких пределах может изменяться каждая из величин V_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$? Например, оказывается, что $0 \le V_4 \le 1/8$ и для любого V_4 из этого промежутка существует соответствующее разбиение параллелепипеда. (При доказательстве неравенства $V_4 \le 1/8$ удобно использовать тот факт, что две противоположные части имеют объемы, произведения которых не больше $1/64$.) Аналогичный вопрос можно рассмотреть и для n-мерного параллелепипеда единичного объема.

Задача **4-4.** *Ответ*: если банк начисляет проценты раз в месяц.

Пусть проценты начисляются раз в год. Тогда в конце первого года вклад будет равен

$$\left(1000 + 1000 \cdot \frac{5}{100}\right) = 1000\left(1 + \frac{5}{100}\right) \text{ руб}.$$

В конце второго года вклад увеличится на 5% уже от этой суммы и станет равным

$$1000\left(1 + \frac{5}{100}\right)\left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 \text{ руб}.$$

Рассуждая аналогично, увидим, что через 10 лет вкладчик получит

$$1000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^{10} \text{ руб}.$$

Если проценты начисляют раз в месяц, то таким же образом найдем, что вкладчик через 10 лет (т.е. через 120 месяцев) получит

$$1000\left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{120} \text{ руб}.$$

Покажем, что второе число больше первого. Для этого достаточно показать, что

$$1 + \frac{5}{100} < \left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{12}.$$

Начнем вычислять правую часть этого неравенства – произведение двенадцати одинаковых выражений

$$\left(1 + \frac{5}{1200}\right)\left(1 + \frac{5}{1200}\right)\ldots\left(1 + \frac{5}{1200}\right).$$

В процессе умножения придется взять в каждой скобке по 1 и все их перемножить – получим в результате 1. Если же в одной скобке взять $5/1200$, а в других – по 1, то мы получим $5/1200$; но таких произведений столько же, сколько скобок, т.е. 12, и они дают число $12 \cdot 5/1200 = 5/100$. Хотя мы учли еще не все члены, получилось уже $1 + 5/100$, поэтому все произведение будет больше этого числа.

∇ Пусть в банк кладется K руб. и банк выплачивает p % годовых. Рассуждая так же, как в решении задачи 4-4, мы увидим, что через m лет вкладчик получит $K(1 + p/100)^m$ руб. (так называемая *формула сложных процентов*).

Эту величину можно грубо оценить снизу с помощью *неравенства Бернулли*, которое мы, по существу, уже доказали:

$$(1+x)^n > 1+nx \quad \text{при} \quad x>0,\ n>1\,.$$

(В решении задачи 4-4 было $x = 5/1200$, $n = 12$.)

Из этого неравенства следует, что если сократить сроки выплаты и пропорционально уменьшить процент начисления, то вкладчик получит большую сумму. Это связано с тем, что при $a > 0$ последовательность

$$x_n = (1 + a/n)^n$$

возрастает. Однако оказывается, что слишком большой выгоды от сокращения сроков вкладчик получить не сможет, так как эта последовательность ограничена. Ее предел равен числу e^a . Если на калькуляторе посчитать суммы из задачи 4-4, то в первом случае мы получим около 1629 руб., во втором – около 1647 руб., а 1000 $e^{0{,}05} \approx 1649$.

Задача **4-5.** *Ответ*: у Подосиновикова.

Пусть в колонне оказалось k переполненных и l непереполненных автобусов. Обозначим количество пассажиров, едущих в переполненных автобусах, через A, а количество остальных – через B.

Тогда $A > 50k$, $B \le 50l$ и, значит, $\dfrac{A}{k} > 50$, $\dfrac{B}{l} \le 50$, поэтому $\dfrac{A}{k} > \dfrac{B}{l}$. Из последнего неравенства вытекают следующие:

$$\frac{B}{A} < \frac{l}{k}, \quad \frac{A+B}{A} < \frac{l+k}{k},$$

откуда

$$\frac{A}{A+B}\cdot 100\% > \frac{k}{l+k}\cdot 100\% \,.$$

В последнем неравенстве слева стоит процент людей, едущих в переполненных автобусах, а справа – процент переполненных автобусов.

Задача **4-6.** *Ответ*: а) 7; б) 16.

Пусть в кружке n участников, из них m девочек. Нам надо найти наименьшее натуральное n, при котором существует такое натуральное m, что $2/5 < m/n < 1/2$.

Перебирая значения n от 2 до 7, находим, что этому неравенству удовлетворяет только дробь $3/7$ со знаменателем 7. Таким образом, 7 – наименьшее возможное значение n.

∇ Обратим внимание на то, что дробь $3/7$ получается из дробей $2/5$ и $1/2$ следующим образом: ее числитель есть сумма их числителей, а знаменатель – сумма их знаменателей.

Для любых положительных дробей a/b и c/d $(a/b < c/d)$ дробь $(a+c)/(b+d)$ удовлетворяет неравенствам $a/b < (a+c)/(b+d) < c/d$ и называется *медиантой* этих дробей.

Выписывая несократимые дроби со знаменателем, не большим n, в порядке возрастания, мы получаем такую таблицу:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
\frac{0}{1} & & & & & & & & & & & & & & & & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & & & & & & & & & & & & & & & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & & & & & & & & \frac{1}{2} & & & & & & & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & & & & & \frac{1}{3} & & & \frac{1}{2} & & & \frac{2}{3} & & & & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{3} & & & \frac{1}{2} & & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{4} & & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & & \frac{1}{2} & & \frac{3}{5} & \frac{2}{3} & & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & & \frac{1}{2} & & \frac{3}{5} & \frac{2}{3} & & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{5}{6} & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{3}{7} & \frac{1}{2} & \frac{4}{7} & \frac{3}{5} & \frac{2}{3} & \frac{5}{7} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{5}{6} & \frac{6}{7} & \frac{1}{1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Здесь каждая n-я строчка (*ряд Фарея*) получается из $(n-1)$-й по следующему правилу: нужно в $(n-1)$-й строчке отметить все такие пары соседних дробей a/b, c/d, у которых сумма знаменателей равна n, и между ними вставить их медианты – дроби $(a+c)/(b+d)$ (они всегда получаются несократимыми).

В задаче а) мы нашли номер строчки $n = 7$, в которой впервые появляется дробь, расположенная между дробями $2/5$ и $1/2$.

В задаче б) действовать перебором довольно утомительно. Поступим следующим образом. Мы должны найти решение неравенств

$$\frac{43}{100} < \frac{m}{n} < \frac{44}{100} = \frac{11}{25} \qquad (1)$$

с наименьшим натуральным n.

Перевернем все дроби и вычтем их общую целую часть:

$$2\frac{14}{43} > \frac{n}{m} > 2\frac{3}{11},$$

$$\frac{14}{43} > \frac{n-2m}{m} > \frac{3}{11}. \qquad (2)$$

То же самое сделаем еще раз:

$$3\frac{1}{14} < \frac{m}{n-2m} < 3\frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{14} < \frac{m-3(n-2m)}{n-2m} = \frac{7m-3n}{n-2m} < \frac{2}{3} \qquad (3)$$

и еще раз:

$$14 > \frac{n-2m}{7m-3n} > \frac{3}{2}. \qquad (4)$$

Заметим, что здесь впервые между границами неравенства встречаются целые числа. Наименьшее из них – число 2. Система уравнений $n-2m=2$, $7m-3n=1$ имеет решение в натуральных числах $n = 16$, $m = 7$.

Докажем, что именно оно и дает решение задачи. Из неравенств (2)–(4) следует, что

$$n-2m>0,\ 7m-3n \geq 1,\ n-2m \geq 2.$$

Поэтому

$$n = 7(n-2m) + 2(7m-3n) \geq 7 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 16.$$

∇ Анализируя это решение, заметим, что, по существу, мы раскладываем числа $\frac{43}{100}$ и $\frac{11}{25}$ в цепные дроби:

$$\frac{43}{100} = \frac{1}{2+\frac{14}{43}} = \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+13}}},$$

$$\frac{11}{25} = \frac{1}{2+\frac{3}{11}} = \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}.$$

Затем берем общую часть этих разложений на том шаге, где разложения отличаются, между $\frac{1}{2}$ и 13 вставляем наименьшее целое число, т.е. 1, и в результате получаем ответ:

$$\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+1}}} = \frac{7}{16}.$$

Этот алгоритм позволяет быстро найти дробь m/n с наименьшим знаменателем n в любом заданном интервале $0 < \alpha < m/n < \beta$ (см. [61, 119]).

Задача **4-7.** *Ответ*: наибольшее расстояние равно $20454\dfrac{6}{11}$ км. Покрышки нужно менять так, чтобы одну треть пути каждая из них была передней.

Примем за единицу количество резины, которое может стереться на одной покрышке, пока она не придет в негодность. Тогда всего перед поездкой имеется 6 единиц резины. Из условия следует, что за 1 км пути стирается $1/15000$ единицы, если покрышка стоит впереди, и $1/25000$, если она стоит сзади. Значит, за 1 км пути стирается $2/15000 + 4/25000 = 11/37500$ единиц резины. Пусть машина прошла x км. Тогда стерлось $11x/37500$ единиц резины. Так как может стереться не больше 6 единиц, имеем $\dfrac{11x}{37500} \le 6$, откуда

$$x \le 20454\frac{6}{11}.$$

Чтобы проехать все $20454\dfrac{6}{11}$ км, нужно менять покрышки так, чтобы каждая из них треть этого пути стояла спереди: тогда все они сотрутся одновременно – к концу пути.

Задача **4-8.** *Ответ*: 12 минут.

Совершенно ясно, что если Малыш и Карлсон хотят съесть завтрак за наименьшее время, то начать и кончить есть они должны одновременно – в противном случае один из них может помочь другому и сократить затраченное время.

Обозначим через x, y, z доли торта, варенья и молока, которые съел Малыш; тогда $(1-x)$, $(1-y)$, $(1-z)$ – доли этих продуктов, которые съел Карлсон, а время, которое они затратили, равно

$$t = 10x + 13y + 14z = 6(1-x) + 6(1-y) + 7(1-z).$$

Тем самым мы приходим к следующей задаче: найти наименьшее значение величины $t = 10z + 13y + 14z$, если числа x, y, z удовлетворяют условиям $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$ и

$$10x + 13y + 14z = 6(1-x) + 6(1-y) + 7(1-z).$$

Из последнего соотношения можно выразить z через x и y:

$$z = \frac{1}{21}(19 - 16x - 19y).$$

Подставляя это выражение в формулу для t, получаем

$$t = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{38}{3}.$$