§ 3. ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

3-1. Разделите данный отрезок AB на четыре равные части с помощью циркуля и линейки, проведя всего 6 линий (прямых и окружностей).

3-2. На плоскости даны две точки A и B. Одним циркулем (без линейки) постройте середину отрезка AB.

3-3. Постройте циркулем и линейкой треугольник по двум данным сторонам a и b ($b > a$), если известно, что угол против одной из них в 3 раза больше угла против другой.

3-4. Постройте циркулем и линейкой окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой и данной окружности.

3-5. Постройте циркулем и линейкой окружность, касающуюся двух данных параллельных прямых l и m и данной окружности радиуса r, расположенной между l и m.

3-6. Внутри данного острого угла AOB дана точка F. Постройте с помощью циркуля и линейки точку M на стороне OA, одинаково удаленную от точки F и другой стороны угла, OB.

3-7. На плоскости задан отрезок длины 1. Постройте циркулем и линейкой отрезок длины $\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

3-8. Дана линейка с делениями через 1 см. Постройте только с помощью этой линейки какую-нибудь прямую, перпендикулярную данной прямой.

3-9. Дан параллелограмм $OBCA$. Проведена прямая, которая отсекает от стороны OB одну треть, от стороны OA – одну четверть, считая от вершины O. Какую часть эта прямая отсекает от диагонали OC?

3-10. Даны две параллельные прямые, и на одной из них отмечены две точки, A и B. Разделите отрезок AB на 3 равные части, используя только линейку.

3-11. Дан выпуклый четырехугольник. Проведем две прямые, которые делят две его противоположные стороны на три равные части. Докажите, что между этими прямыми заключена треть площади четырехугольника.

3-12. Точки A, B, C являются вершинами неравнобедренного треугольника. Сколькими способами можно поставить на плоскости точку D так, чтобы множество точек (A, B, C, D) имело ось симметрии?

3-13. Из произвольной точки M внутри данного острого угла A опустим перпендикуляры MP и MQ на его стороны. Из вершины A опустим перпендикуляр AK на отрезок PQ. Докажите, что $\angle PAK = \angle MAQ$.

3-14. Постройте с помощью циркуля и линейки правильный десятиугольник.

3-15. Начертите окружность и разбейте ее на 12 равных частей. Выберите одну из точек деления A и соедините ее прямыми с остальными точками деления, а также проведите касательную к окружности в точке A. В результате у вас получится пучок из 12 прямых, проходящих через точку A.

а) Докажите, что построенные прямые делят плоскость на 24 равных угла.

б) Выберите на окружности еще одну точку деления B и постройте из нее такой же пучок из 12 прямых, как из точки A. Докажите, что все 110 точек пересечения 23 построенных прямых (не считая точек A и B) лежат на 11 окружностях – по 10 точек на каждой окружности.

3-16. Из угла прямоугольного бильярда размерами $m \times n$ (где m, n – натуральные числа) катится шар под углом в $30°$ к стенке бильяарда. Докажите, что шар никогда не попадет в угол. (Разумеется, шар считается точкой.)

3-17. Четыре точки расположены на плоскости. Могут ли:

а) попарные расстояния между ними равняться соответственно 1 см, 2 см, 3 см, 4 см, 5 см и 6 см;

б) пять попарных расстояний между ними равняться 1 см, а шестое – 1,8 см?

3-18. На сколько частей могут делить плоскость четыре прямые?

3-19. На сколько частей делят пространство:

а) четыре;

б) пять плоскостей, проходящих через одну точку (никакие три плоскости не имеют общей прямой)?

3-20. Дан выпуклый четырехгранный угол. Постройте такое его сечение плоскостью, чтобы в сечении получился параллелограмм.

3-21. Докажите, что любую треугольную призму с достаточно большой высотой можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный треугольник.

3-22. Андрей разрезал выпуклый картонный многогранник по ребрам и послал получившийся набор граней по почте Коле. Коля склеил из всех этих граней тоже выпуклый многогранник.

Может ли случиться так, что многогранники Андрея и Коли неодинаковы?

3-23. Существует ли выпуклый девятигранник, у которого все девять граней – четырехугольники?

3-24. Дано, что разверткой некоторой пирамиды служит остроугольный треугольник, в котором проведены три средние линии. Докажите, что существует прямоугольный параллелепипед, четыре несмежные вершины которого являются вершинами этой пирамиды.

3-25. Дан трехгранный угол с вершиной O и двугранными углами, равными α, β и γ. Из вершины O к каждой грани проведен перпендикулярный ей луч, направленный во внешнюю сторону (т.е. так, что этот луч и трехгранный угол лежат по разные стороны от плоскости грани). Найдите плоские углы трехгранного угла, образованного построенными лучами.

Обсуждение задач

Задача **3-1.** Проведем две окружности радиуса AB с центрами в точках A и B. Через точки пересечения этих окружностей проведем прямую, которая пересекает отрезок AB в точке C. Проведем теперь окружность с центром в точке C радиусом AB. Эта окружность пересечет каждую из проведенных окружностей в двух точках. И, наконец, проведем через эти две пары точек две прямые – см. рисунок 13.

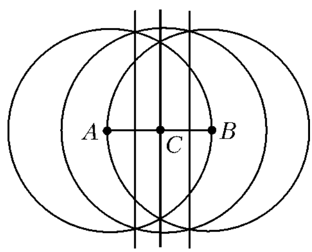

Рис. 13

Таким образом, мы провели 6 линий: три окружности и три прямые. Докажем, что три проведенные прямые делят отрезок AB на четыре равные части.

Как известно, геометрическим местом точек, равноудаленных от концов отрезка, является серединный перпендикуляр этого отрезка – прямая, проведенная через середину данного отрезка перпендикулярно к нему.

Две точки пересечения двух первых построенных окружностей находятся на одинаковом расстоянии AB от точек A и B, поэтому прямая, проходящая через них, является серединным перпендикуляром отрезка AB и делит его на две равные части в точке C.

Аналогично точки пересечения третьей окружности с одной из первых двух находятся на одинаковом расстоянии AB и от середины C отрезка AB, и от конца этого отрезка, поэтому прямая, проходящая через эти точки пересечения, делит половину отрезка AB еще раз пополам.

∇ Провести *построение с помощью циркуля и линейки* – это значит свести решение задачи к выполнению некоторой последовательности следующих операций.

I. Через две данные точки провести прямую. II. Из данного центра провести окружность данного радиуса. III. Найти точки пересечения: а) двух прямых; б) прямой и окружности; в) двух окружностей.

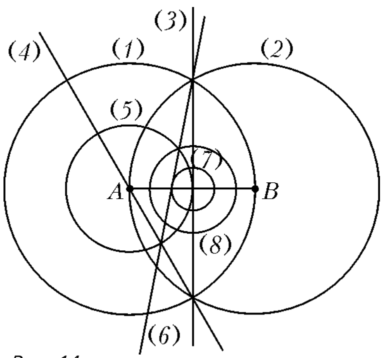

Рис. 14

В нашей задаче последовательность этих операций такова: II, II, III в), I, III а), II, III в), III в), I, I, III а), III а). При этом выполнено условие задачи: количество операций I и II равно шести.

Попробуйте придумать способы деления отрезка на 3 или на 5 равных частей так, чтобы количество операций I и II было как можно меньше. На рисунке 14 изображен способ деления отрезка на 6 равных частей, при котором количество операций I и II равно 8.

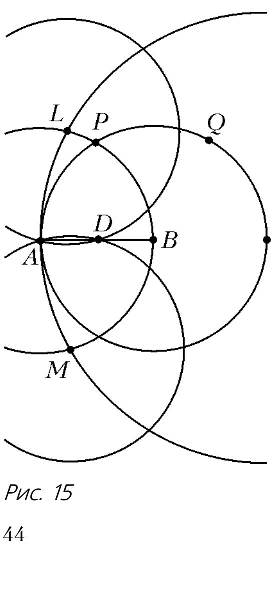

Рис. 15

Задача **3-2.** Сначала удвоим отрезок AB, т.е. построим такую точку C на прямой AB, что $AB = BC$. Для этого проведем окружность с центром B и радиусом $r = BA$. Затем, начиная от точки A, отметим на этой окружности последовательно такие точки P, Q, C, что $AP = PQ = QC = r$ – см. рисунок 15. Треугольники ABP, PBQ и QBC – равносторонние, поэтому угол ABC равен $180°$. Следовательно, точка C лежит на прямой AB и $AB = BC$.

Теперь, отправляясь от точек A, B и C, найдем середину отрезка AB. Проведем окружность с центром в точке C и радиусом $CA = 2r$ (см. рис.15). Отметим точки L, M ее пересечения с окружностью с центром A и радиусом $r = AB$. Далее, проведем две окружности с центрами L и M и радиусом $r = AB$. Эти окружности пересекаются в точке A и еще в одной точке D.

Докажем, что D – середина отрезка AB. В самом деле, точки L и M симметричны относительно прямой AC, а точка D равноудалена от точек L и M, т.е. лежит на прямой AC. Рассмотрим теперь два равнобедренных треугольника ALD и CAL. Они подобны друг другу, ведь у них при основаниях общий угол. A. Запишем пропорцию: $AD : AL = AL : CA$ или $AD : r = r : 2r$. Отсюда получаем, что $2AD = r = AB$.

∇ В начале решения задачи 3-2 мы удвоили отрезок AB (построили точку C), проведя четыре окружности. Это построение можно сделать экономнее – проведя три окружности – см. рисунок 16,*а*.

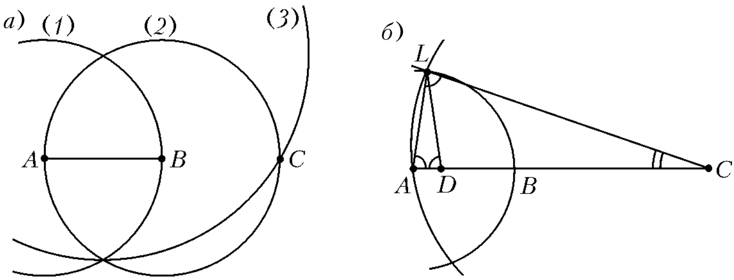

Рис. 16

Задачу 3-2 можно обобщить: указать способ деления данного отрезка с помощью циркуля на n равных частей. Точно так же строится отрезок $AC = nAB$, затем аналогично, по точкам A, B и C строится точка D – см. рисунок 16,*б*. Из подобия равнобедренных треугольников ALD и ACL следует, что $DA \cdot CA = r^2$ (в нашем случае $CA = nr$ и $DA = r/n$).

С этим построением связано преобразование плоскости, называемое инверсией относительно окружности с центром A и радиусом $r = AB$. Образ точки P при этом преобразовании определяется как точка P', лежащая на луче AP, для которой $AP' \cdot AP = r^2$. В задаче 3-2 мы фактически строили точку D, которая являлась образом точки C при инверсии.

Преобразование инверсии обладает замечательным свойством: оно переводит прямые и окружности снова в окружности и прямые.

Используя инверсию, можно показать, что операции III а) и III б) (нахождение точек пересечения двух прямых и прямой с окружностью), о которых шла речь в комментарии к предыдущей задаче, можно выполнить одним циркулем. Отсюда можно вывести, что *всякая задача на построение, решаемая с помощью циркуля и линейки, может быть* *решена с помощью одного циркуля* (**теорема Маскерони**). (При этом, конечно, мы не можем без линейки выполнить операцию I – провести через две данные точки прямую. Вместо этого нужно условиться, что прямая определена, если заданы две ее точки.) (См. [45, 98].)

Задача **3-3.** Предположим, что треугольник ABC построен, $\angle B = 3\angle A$ (рис.17). Проведем из точки B до прямой AC отрезок BE такой, что $\angle ABE = \angle BAC$. Тогда треугольник ABE будет равнобедренным, поэтому $AE = BE$. Треугольник BCE также будет равнобедренным, поскольку каждый из углов BEC и CBE равен $2\angle BAC$ (угол BEC – внешний угол треугольника AEB); поэтому $BC = CE = a$. Следовательно, $AE = EB = b - a$, так как вся сторона AC равна b.

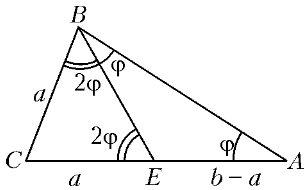

Рис. 17

В треугольнике BCE нам известны длины всех трех сторон, поэтому его можно построить циркулем и линейкой. После этого на продолжении стороны CE откладываем циркулем отрезок $EA = b - a$. Треугольник ABC – искомый.

Действительно, у него, очевидно, $BC = a$ и $AC = b$. Докажем, что угол ABC втрое больше угла BAC. Треугольник BAE – равнобедренный: $AE = EB = b - a$, поэтому $\angle BAE = \angle ABE$. Далее, угол BEC как внешний угол треугольника AEB вдвое больше угла BAC. Поскольку треугольник BCE – равнобедренный ($BC = CE$), угол CBE также вдвое больше угла BAC, Поэтому $\angle ABC = 3\angle BAC$, что и требовалось доказать.

Задача имеет решение, когда из отрезков a, a и $b - a$ можно построить треугольник, т.е. когда $3a > b > a$. При этом условии решение единственно.

∇ Написанный выше текст решения состоит из четырех абзацев. Их можно озаглавить так: (1) *анализ*, (2) *построение*, (3) *доказательство*, (4) *исследование*. Обычно так оформляются решения задач на построение.

Задача **3-4.** Геометрическое место центров окружностей данного радиуса r, касающихся данной прямой, есть пара прямых l_1 и l_2, параллельных этой прямой, проходящих на расстоянии r от нее.

Пусть O – центр данной окружности, R – ее радиус. Геометрическое место центров окружностей радиуса r, касающихся данной окружности, представляет собой: 1) две окружности радиусов $R + r$ и $R - r$ с тем же центром O, если $R > r$;

2) окружность радиуса $R + r$ с центром в точке O и саму точку O, если $R = r$; 3) окружность радиуса R +- r с центром в точке O, если $R < r$.

Центр искомого круга принадлежит пересечению этих двух геометрических мест. Так как пересечение двух параллельных прямых с двумя окружностями может, самое большее, состоять из 8 точек, то число решений задачи 3-4 может колебаться от 0 до 8 (проверьте, что все эти случаи возможны).

∇ Задача 3-4 решена нами *методом геометрических мест.*

Он заключается в следующем. Пусть точка X, которую требуется построить, определяется двумя условиями, вытекающими из требования задачи. Находится сначала геометрическое место точек, удовлетворяющих только одному из условий. Затем находится геометрическое место точек, удовлетворяющих только второму условию. Общие точки этих двух множеств удовлетворяют обоим условиям − это и есть искомые точки X.

Задача 3-4 сводится к построению центра X окружности. Мы выделили два условия: 1) X находится на расстоянии r от данной окружности и 2) X находится на расстоянии r от данной прямой. Найдя геометрические места точек, удовлетворяющих каждому из этих условий, мы определили возможные положения точки X.

Задача **3-5.** Поскольку искомая окружность должна касаться параллельных прямых l и m, ее центр K находится на прямой, параллельной этим прямым и идущей посередине между ними. Радиус R этой окружности равен, тем самым, половине расстояния между прямыми l и m. С другой стороны, искомая окружность должна касаться данной окружности и, значит, ее центр K должен находиться на расстоянии $R + r$ или $R - r$ (если $R \geq r$) от точки O. Таким образом, точка K должна находиться на одной из окружностей с центром O и радиусами $R + r$ и $R - r$.

Построение можно провести так. Построить прямую, идущую посередине между l и m, и затем построить две окружности с центром O и радиусами $R + r$ и $R - r$ (если $R > r$). Точка K будет одной из точек пересечения прямой с окружностями.

∇ Эта задача тесно связана со знаменитой **задачей Аполлония** (около 200 г. до нашей эры): *даны три окружности, требуется провести четвертую, касающуюся трех данных.* Оказывается, эту трудную задачу можно с помощью преобразования инверсии свести к задаче 3-5.

Для определенности будем считать, что данные окружности расположены вне друг друга. Если увеличить их радиусы на одну и ту же величину, то центр касающейся их окружности останется на месте. Увеличим радиусы настолько, чтобы две из данных окружностей коснулись друг друга. После этого произведем инверсию всей плоскости (см. комментарий к задаче 3-2) относительно какой-нибудь окружности с центром в точке касания двух данных окружностей. Эти окружности перейдут при этом в две параллельные прямые, а третья – в окружность.

Решив задачу 3-5 для этих прямых и окружности, построив образ точки K при обратной инверсии и проведя «сжатие» окружностей, мы получим искомую окружность в задаче Аполлония.

Задача **3-6.** Проведем прямую OF и отметим какую-нибудь точку N на луче OA. Опустим перпендикуляр NK из точки N на прямую OB. Проведем окружность с центром N и радиусом NK. Пусть L – одна из точек пересечения этой окружности с лучом OF. Через точку F проведем прямую, параллельную NL. Точка M пересечения этой прямой с лучом OA и будет искомой – см. рисунок 18.

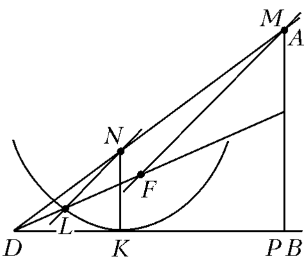

Рис. 18

В самом деле, гомотетия с центром O, переводящая точку L в точку F, переводит, в силу параллельности соответствующих прямых, точку N в точку M, а точку K – в точку P (основание перпендикуляра, опущенного из точки M на OB). Таким образом, из равенства $NK = NL$ следует равенство $MF = MP$.

Задача имеет два решения (в процессе построения окружность с центром N и радиусом NK пересечет луч OA в двух точках).

∇ Задача 3-6 решена нами *методом подобия*. Он заключается, вообще говоря, в следующем. Сначала строится фигура, подобная искомой, а затем она увеличивается (или уменьшается) в нужном отношении.

В задаче 3-6 мы сначала построили ломаную KNL, для которой выполнено условие задачи, а затем построили подобную ей ломаную PMF, проходящую через точку F.

Попробуем к решению задачи 3-6 применить метод геометрических мест (см. комментарий к задаче 3-4). Оказывается, что геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки F и от данной прямой OB, представляет собой параболу.

Для того чтобы убедиться в этом, воспользуемся методом координат. Пусть h – расстояние от точки F до прямой OB. Выберем систему координат Oxy так, чтобы ось Ox совпала с прямой OB, а ось Oy прошла через точку F. Тогда точки $(x; y)$, которые равноудалены от точки F и прямой OB, должны удовлетворять уравнению $|y| = \sqrt{x^2 + (y-h)^2}$. Возводя обе его части в квадрат, получаем уравнение параболы: $y = x^2/2h + h/2$.

Таким образом, искомые точки в задаче 3-6 – это точки пересечения параболы и прямой OA. Всю параболу мы, конечно, не можем построить циркулем и линейкой, но точки ее пересечения с данной прямой, согласно задаче 3-6, построить несложно.

Задача **3-7.** 1) Построим прямой угол и на его сторонах отложим от вершины отрезки длины 1. Отрезок, соединяющий их концы, имеет длину $\sqrt{2}$.

2) Отложим на прямой отрезок AB длины $1+\sqrt{2}$, а затем – отрезок BC длины 1 – см. рисунок 19.

3) Построим на отрезке AC как на диаметре окружность.

4) Проведем через точку B прямую, перпендикулярную диаметру AC.

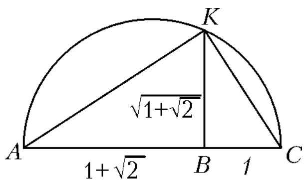

Рис. 19

Пусть K – одна из точек пересечения последней прямой с окружностью. Докажем, что $BK = \sqrt{1+\sqrt{2}}$. Действительно, треугольник AKC – прямоугольный, так как AKC – вписанный в окружность угол, опирающийся на ее диаметр. Квадрат высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, равен произведению отрезков, на которые эта высота делит гипотенузу, т.е. $\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot 1$.

∇ В этой задаче мы показали, как по заданным отрезкам a и b построить отрезки $\sqrt{a^2+b^2}$ и $\sqrt{ab}$. Используя теорему о параллельных прямых, пересекающих стороны угла, можно по заданным отрезкам a, b, c построить отрезок ab/c.

Комбинируя эти построения, можно построить много других отрезков. Например, отрезок длины $\sqrt{ab+cd}$ можно построить так: построить отрезки длин $m = \sqrt{ab}$ и $n = \sqrt{cd}$, а затем – отрезок длины $\sqrt{m^2+n^2}$.

Оказывается, *по данному отрезку длины* 1 *можно построить лишь такие отрезки, длины которых выражаются рациональными* (арифметическими) *операциями и многократным извлечением квадратных корней.*

Для знатоков. Длины всех таких отрезков образуют поле. Разрешимость задачи 3-7 следует из того, что число $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ входит в это поле. Неразрешимость классической задачи об удвоении куба вытекает из того, что число $\sqrt[3]{2}$ не входит в это поле (см. [98]).

Задача **3-8.** Отложим на данной прямой l отрезки OA и OB длины 1 и от той же точки O – еще два отрезка OK и OL длины 1 (точки K и L лежат по одну сторону от прямой; см. рис.20). Пусть C – точка пересечения прямых AK и BL, а H – прямых AL и BK. Тогда прямая CH и будет искомым перпендикуляром к прямой l.

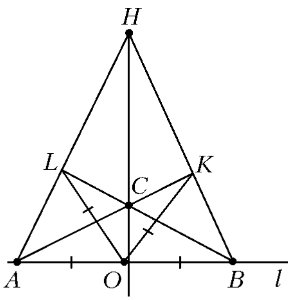

Рис. 20

Для доказательства надо использовать две такие теоремы: 1) если в треугольнике медиана, проведенная к основанию, равна половине его длины, то угол при вершине – прямой; 2) в треугольнике три высоты пересекаются в одной точке.

∇ В задаче 3-8 речь шла о построениях необычным набором инструментов: линейкой и эталоном длины. Как можно убедиться, с их помощью удается решить очень многие стандартные задачи на построение: провести через данную точку прямую, параллельную или перпендикулярную данной, отложить данный отрезок на данной прямой и данный угол в любую сторону от данного луча.

Однако линейкой и эталоном длины можно построить не все, что можно построить циркулем и линейкой. Например, нельзя построить, исходя из отрезка длины 1, отрезок длины $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ (сравните с задачей 3-7); более того, в общем случае нельзя построить даже прямоугольный треугольник по данным катету и гипотенузе.

Оказывается, *исходя из отрезка длины* 1, *можно построить лишь такие отрезки, длины которых выражаются рациональными операциями и извлечением квадратных корней из сумм квадратов длин уже построенных отрезков* (другими словами, выражения для длин должны оставаться вещественными при всевозможных изменениях знака перед всеми радикалами, см. [90]).

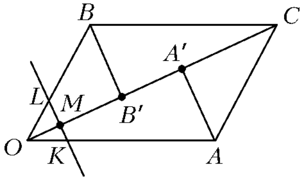

Рис. 21

Задача **3-9.** *Ответ*: $1/7$. Пусть K, L, M – точки пересечения проведенной прямой со сторонами OA,

OB и диагональю OC соответственно – см. рисунок 21. Проделаем следующие построения, которые позволят нам представить все нужные отношения в виде отношений отрезков диагонали OC.

Проведем отрезки BB' и AA', параллельные данной прямой, причем B' и A' – точки на диагонали OC. Тогда треугольники OBB' и CAA' равны (они симметричны относительно центра параллелограмма), поэтому $OB' = CA'$. Из равенств

$$3 = OB : OL = OB' : OM,$$

$$4 = OA : OK = OA' : OM,$$

$$OC = OB' + OA'$$

получаем:

$$OC : OM = 3 + 4 = 7.$$

∇ Аналогично можно показать, что прямая, отсекающая от сторон параллелограмма соответственно $1/\lambda$ и $1/\mu$, части, отсекает от диагонали $1/(\lambda+\mu)$ часть.

Опираясь на этот факт, можно доказать важное *неравенство для нормы вектора*, определяемой следующим образом (см. [80]). Пусть Ф – ограниченное замкнутое множество с центром симметрии O (внутренней точкой Ф – см. рис.22). Для каждого вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ положим $\|\vec{a}\|$ равным отношению OA/OL, где L – точка пересечения луча OA с границей фигуры Ф. Тогда если Ф выпукло, то выполнено «неравенство треугольника»:

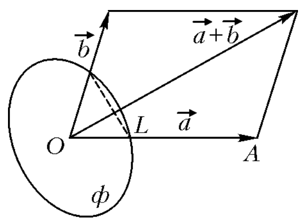

Рис. 22

$$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\| \le \|\vec{a}\| + \left\|\vec{b}\right\|.$$

В частности, если Ф – круг радиуса 1 с центром O на плоскости Oxy, то норма вектора – это обычная длина, а «неравенство треугольника» для векторов $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ выглядит так:

$$\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} \le$$

$$\le \sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2}.$$

Задача **3-10.** Достаточно провести (не считая двух данных) 9 прямых (на рис.23 прямые занумерованы в порядке их появления). Дока-

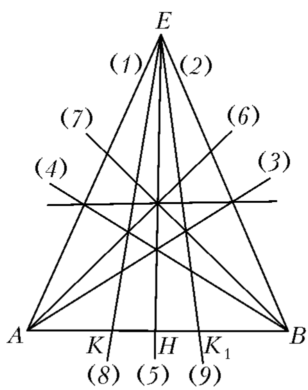

Рис. 23

жем, что на этом рисунке

$$AH = BH = AB/2.$$

Отрезок CD можно получить из AB гомотетией с центром E и с центром F; при той и другой гомотетии точка H переходит в G (см. рис.24). Поэтому

$$\frac{CG}{AH} = \frac{EC}{EA} = \frac{CD}{AB} = \frac{FC}{FB} = \frac{CG}{BH},$$

откуда $AH = BH$.

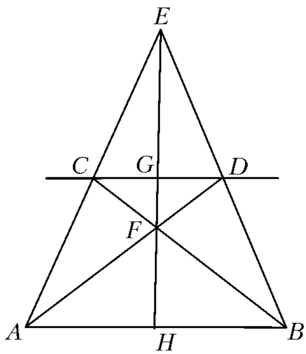

Рис. 24

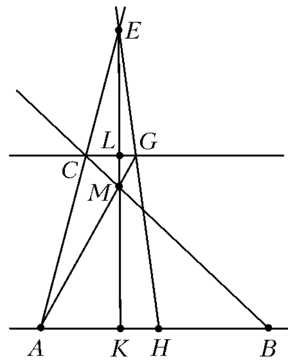

Рис. 25

Отрезок CG можно получить из отрезка AH гомотетией с центром E и из отрезка AB – гомотетией с центром M (рис.25).

При той и другой гомотетии точка L переходит в точку k. Поскольку $2AH = AB$,

$$\frac{CL}{AK} = \frac{EC}{EA} = \frac{CG}{AH} = \frac{2CG}{AB} = \frac{2CM}{MB} = \frac{2CL}{BK},$$

откуда $2AK = BK$, т.е. $AK = AB/3$. Аналогично доказывается, что на рисунке 24 $BK_1 = AB/3$, т.е. $AK = KK_1 = K_1B$.

∇ Действуя таким же образом дальше (проводя прямую AL и через точку N ее пересечения с CB – прямую EN, пересекающую AB и CD, и т.д.), можно отсечь от отрезка AB $1/4$-ю, затем $1/5$-ю и вообще $1/n$-ю часть для любого натурального n.

Отметим еще связь этой задачи, в которой речь идет об отношении отрезков в трапеции, с предыдущей, в которой изучались отношения отрезков в параллелограмме (см. рис.26,a). Прямая, проходящая через вершину B' параллелограмма $A'B'C'D'$ и середину H' его стороны $A'D'$, отсекает от его диагонали $A'C'$ отрезок $A'M' = A'C'/3$. Прямая,

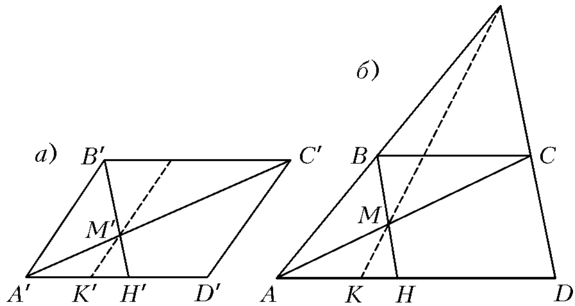

Рис. 26

проходящая через точку M' и параллельная стороне $A'B'$, отсекает от сторон $B'C'$ и $A'D'$ также $1/3$ часть. Рисунки 26,*а* и 26,*б*, как мы видим, очень похожи. Причину аналогии между ними мы обсудим в комментарии к задаче 3-20.

Задача **3-11.** Для решения задачи сделаем дополнительное построение: проведем во всех четырехугольниках диагонали, как показано на рис.27,*а*. Пусть площади крайних из заштрихованных на рисунке 27,*а* треугольников равны x и y соответственно, Тогда площадь среднего равна $(x+y)/2$. Действительно, их

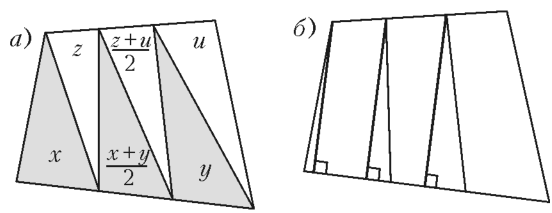

Рис. 27

основания одинаковы, а высота среднего равна полусумме высот крайних (это следует из того, что высота среднего является средней линией трапеции, основаниями которой служат высоты двух крайних треугольников – см. рис.27,*б*).

Такое же рассуждение можно провести и для трех не заштрихованных на рисунке 27,*а* треугольников. Итак, площадь всего четырехугольника равна $3(x+y+z+u)/2$, а площадь заключенной между прямыми части четырехугольника равна $(x+y+z+u)/2$, т.е. в 3 раза меньше.

∇ Верно и более общее утверждение. Если несколько прямых делят каждую из двух противоположных сторон четырехугольника на одинаковые части, то площади четырехугольников, на которые они разбивают

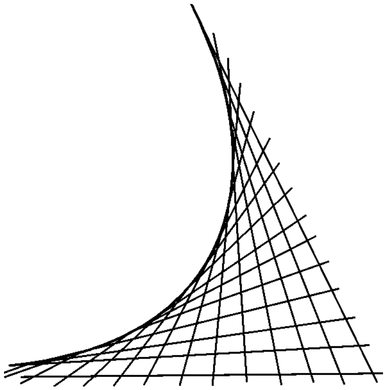

Рис. 28

данный четырехугольник, образуют арифметическую прогрессию. Если же и две другие противоположные стороны данного четырехугольника разбить на одинаковые части и провести соответствующие прямые, так что внутри четырехугольника возникнет сетка из маленьких клеток – см. рисунок 28, – то каждый отрезок с концами на противоположных сторонах четырехугольника разделится точками пересечения на одинаковые части и тем самым площади клеток в каждом ряду одного и другого направлений составят арифметическую прогрессию.

Любопытно, что все проведенные на рисунке прямые касаются некоторой параболы – см. рисунок 28.

Если представить себе, что исходный четырехугольник составлен из шарнирно соединенных стержней, то при его изгибании в пространстве соответствующие прямые будут по-прежнему пересекаться – они лежат на седлообразной поверхности, «сотканной» из двух семейств прямых.

Задача **3-12.** *Ответ*: если треугольник непрямоугольный, то 6 способов, если прямоугольный – 5 способов.

Пусть множество точек $\{A, B, C, D\}$ имеет ось симметрии. Вне оси симметрии может лежать лишь четное число точек, иначе их нельзя разбить на взаимно симметричные пары. Поскольку все 4 точки не могут лежать на оси (точки A, B и C не лежат на одной прямой), то надо рассмотреть два случая.

1) На оси нет точек нашего множества. Тогда ось – серединный перпендикуляр к одной из сторон треугольника ABC, а точка D симметрична противолежащей этой стороне вершине. Таким образом, мы получаем 3 способа поставить точку D – точки D_1, D_2, D_3 на рисунке 29; если $C = 90°$, то серединные перпендикуляры к катетам AC и BC дают нам одну и ту же точку $D_1 = D_2$, так как эти перпендикуляры являются осями симметрии прямоугольника $ACBD$.

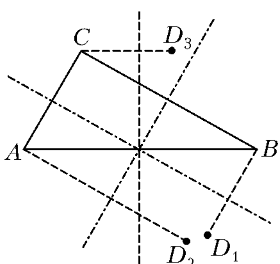

Рис. 29

2) На оси лежат 2 точки. Тогда ось симметрии проходит через две из точек A, B, C, а точка D симметрична третьей из этих точек относительно оси. Так получаем еще 3 способа – см. рисунок 30.

Никакие другие совпадения двух из шести построенных точек, кроме рассмотренного в п.1), для неравнобедренного треугольника невозможны.

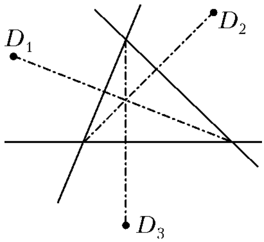

Рис. 30

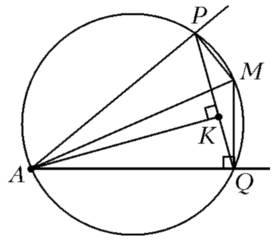

Рис. 31

Задача **3-13.** Построим окружность с диаметром AM (рис.31). Поскольку углы APM и AQM – прямые, точки P и Q лежат на этой окружности; $\angle MAQ = \angle QPM$ (так как это вписанные в окружность углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Заметим также, что $\angle PAK = \angle QPM$. Действительно, $\angle PAK = 90° -$ $- \angle APK$ (AK – перпендикуляр к PQ) и $\angle QPM = 90° - \angle APK$ (MP – перпендикуляр к AP). Отсюда $\angle MAQ = \angle PAK$, что и требовалось доказать.

∇ Эта задача неоднократно использована Д.Гильбертом в его знаменитой книге «Основания геометрии», в частности, для того, чтобы выяснить, какие задачи на построение можно решить лишь с *помощью линейки и эталона длины* (см. обсуждение задачи 3-8 и [90]).

Задача **3-14.** Вычислим сторону правильного десятиугольника по радиусу описанного около него круга. Для этого рассмотрим равнобедренный треугольник AOB, где O – центр правильного десятиугольника, а AB – одна из его сторон (см. рис.32). Тогда $\angle AOB = 36°$ и $\angle OAB = 72°$. Проведем биссектрису AB_1 угла OAB. Так как треугольники OB_1A и B_1AB – равнобедренные, то $AB = AB_1 = OB_1$.

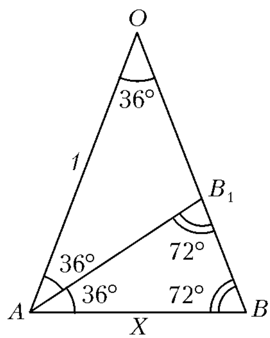

Рис. 32

Пусть $OA = 1$, $AB = x$; из подобия треугольников AOB и B_1AB вытекает пропорция $\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{x}$.

Решая полученное уравнение, находим его положительный корень $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Отрезок такой длины мы можем построить (см. задачу 3-7). Далее, проводим окружность радиуса 1 и последовательно откладываем на ней циркулем с раствором $\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$ все вершины правильного десятиугольника одну за другой.

∇ Число $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ часто встречается в разных задачах. Например, $\sin 18° = \frac{x}{2} = \left(\sqrt{5}-1\right)/4$.

Число $\tau = 1/x = \left(\sqrt{5}+1\right)/2$ известно с древних времен – оно соответствует «*золотому сечению*»: если отрезок разделить в этом отношении τ, то отношение отрезка к большей его части будет равно отношению большей части к меньшей. Это число возникает и в связи с числами Фибоначчи (см. задачи 6-11, 6-16 и 6-17),

Для знатоков. Возможность построения правильного n-угольника определяется тем, принадлежит ли число $\sin\frac{180°}{n}$ полю чисел, описанных в комментарии к задаче 3-7. Как показал К.Ф.Гаусс, построить правильный n-угольник можно тогда и только тогда, когда $n = 2^k \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$, где n_i – различные простые числа вида $2^{2^l}+1$.

Условие, выделяющее *такие* числа n, эквивалентно следующему: значение функции Эйлера $\varphi(n)$ (см. комментарий к задаче 2-8) является степенью двойки. В задаче 3-14 $n = 10$, $\sin\frac{180°}{n} = \left(\sqrt{5}-1\right)/4$ и количество $\varphi(10)$ чисел, взаимно простых с числом 10, равно $4 = 2^2$.

Откуда возникает условие $\varphi(n) = 2^k$, можно пояснить примерно так. При построении циркулем и линейкой количество получаемых точек каждый раз, когда мы находим точки пересечения двух окружностей и точки пересечения прямой и окружности, удваивается. Поэтому в результате мы получаем, вообще говоря, 2^l решений. Допустим теперь, что мы нашли некоторый алгоритм построения правильного n-угольника. По этому алгоритму мы можем получить не только этот правильный n-угольник, но также любую из правильных замкнутых n-звенных ломаных – «звездчатых многоугольников» (см. задачу 2-8). Их число равно $\varphi(n)/2$. Тем самым $\varphi(n)$ – степень двойки.

Необходимость и достаточность этого условия доказывается алгебраически (см. [31, 51]).

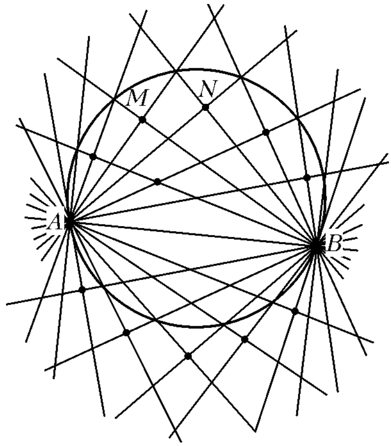

Рис. 33

Задача **3-15.** а) Две соседние прямые проходят через точку A окружности и образуют угол, вписанный в окружность и опирающийся на дугу в $30°$ – см. рисунок 33. Согласно теореме о вписанном угле, этот угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, т.е. $15°$, что и доказывает требуемое утверждение.

б) Рассмотрим точку M пересечения какой-нибудь прямой первого пучка с какой-нибудь прямой второго пучка. Проведем через эту точку, а также через точки A и B окружность (на рис.33 она показана черными точками). Рассмотрим теперь точку N пересечения прямых, соседних со взятыми прямыми (например, по часовой стрелке). Тогда углы AMB и ANB равны, поскольку суммы углов при вершинах A и B треугольников AMB и ANB одинаковы (угол MAB на $15°$ больше угла NAB, а угол NBA на $15°$ больше угла MBA).

Поскольку углы AMB и ANB равны, точки A, M, N и B лежат на одной окружности.

∇ Факт, установленный в задаче 3-15 б), хорошо объясняется на языке «движений». Если прямая вращается равномерно с угловой скоростью ω вокруг точки A окружности, то, согласно теореме о вписанном угле, другая ее точка пересечения с окружностью равномерно движется по окружности с угловой скоростью 2ω.

Если две пересекающиеся прямые l_A и l_B вращаются в плоскости вокруг двух своих точек A и B с одинаковой угловой скоростью ω, то траектория точки пересечения этих прямых – окружность. В самом деле, построим окружность γ, проходящую через три точки: A, B и точку M пересечения прямых в какой-нибудь момент времени. С одной стороны, точка пересечения прямой l_A с окружностью γ движется по окружности γ равномерно с угловой скоростью 2ω, а с другой стороны, точно так же движется и точка пересечения прямой l_B с той же окружностью γ. Но так как в какой-то момент времени точки пересечения прямых l_A и l_B с окружностью γ находились в одной точке окружности γ, то и все остальное время вращения прямых точки их пересечения будут находиться на этой окружности.

Для знатоков. 23 проведенные прямые образуют сетку. Если раскрасить клетки этой сетки в шахматном порядке, то мы увидим семейство окружностей, проходящих через точки A и B, и семейство гипербол (картинка получится нагляднее, если в точках A и B взять пучки не из 12, а из 24 прямых).

Гиперболы здесь возникают в связи со следующим обстоятельством. Если прямые l_A и l_B вращаются вокруг своих точек A и B, одна с угловой скоростью ω, а другая – с угловой скоростью $(-\omega)$ (в разные стороны), то точка их пересечения движется по гиперболе.

В самом деле, найдется момент времени, когда рассматриваемые прямые l_A и l_B параллельны. Выберем систему координат с центром в середине отрезка AB, а ось Ox направим параллельно прямым l_A и l_B.

Пусть координаты точки A равны $(a; b)$, тогда координаты точки B равны $(-a; -b)$. В момент времени t уравнения прямых можно записать так:

$$x \sin \omega t - y \cos \omega t = a \sin \omega t - b \cos \omega t ,$$

$$x \sin \omega t + y \cos \omega t = -a \sin \omega t - b \cos \omega t .$$

Координаты точки их пересечения равны

$$x = -b \operatorname{ctg} \omega t ,$$

$$y = -a \operatorname{tg} \omega t .$$

Следовательно, $xy = ab$, т.е. точки пересечения прямых лежат на гиперболе (см. [16]).

Задача **3-16.** Будем отражать от стенок не шар, а сам прямоугольник – бильярд. После всевозможных многократных отражений прямоугольника относительно сторон (удобнее всего это делать на клетчатой бумаге) мы получим сетку из прямых, разбивающую плоскость на прямоугольники $m \times n$. Чтобы построить траекторию шара в бильярде, можно провести прямую из начальной точки O под углом в $30°$ к одной из сторон, посмотреть, какие прямоугольники сетки она пересекает, и сложить их «гармошкой» – рисунок 34.

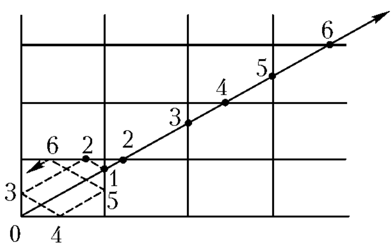

Рис. 34

Докажем теперь, что прямая, проведенная через узел O сетки под углом в $30°$ к стенке бильярда, не проходит через другие узлы. Отсюда будет следовать утверждение задачи.

Если бы шар прошел через какой-то другой узел, то получился бы прямоугольный треугольник с углом $30°$, длины катетов которого – целые числа. Но $\operatorname{tg} 30° = 1/\sqrt{3}$ (число иррациональное) не может равняться отношению двух целых чисел.

Для знатоков. Траектория шара в задаче 3-16 будет всюду плотно «заметать» бильярд, хотя ее направление всегда будет составлять угол $30°$ с одной из сторон. Если бильярд имеет форму окружности или эллипса, то траектория шара уже не будет всюду плотной – остаются области, куда она не заходит. Вообще, поведение типичной траектории шара в бильярде на плоскости или в многомерном пространстве сильно зависит от формы бильярда. Для бильярдов, все борта которых обращены выпуклостью внутрь, доказана *эргодичность*: типичная траектория шара всюду плотна в фазовом пространстве, она проходит сколь угодно близко от любой точки бильярда, причем в различных направлениях. Именно к таким задачам о рассеивающих бильярдах сводятся некоторые математические модели газа из твердых сталкивающихся «атомов». Выпуклые бильярды, в частности бильярды с прямыми стенками, этим свойством уже, как правило, не обладают, и описать траектории в таких бильярдах удалось лишь в частных случаях (см. [110, 111]).

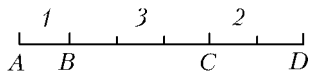

Рис. 35

Задача **3-17.** а) *Ответ*: могут. Пример приведен на рисунке 35.

б) *Ответ*: не могут.

Рассмотрим три точки, все попарные расстояния между которыми равны 1 см. Они образуют правильный треугольник с длиной стороны 1 см. Расстояния от четвертой точки до каких-то двух из них равны 1 см, поэтому четвертая точка с этими двумя также образует правильный треугольник. Поэтому все четыре точки должны образовать ромб с длиной стороны 1 см – см. рисунок 36. Но тогда шестое расстояние – длина большей диагонали этого ромба, которая равна $\sqrt{3}$ см, а $1{,}8 \neq \sqrt{3}$.

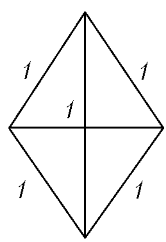

Рис. 36

∇ Обобщим эту задачу следующим образом.

При каких значениях α существуют четыре точки: а) на плоскости; б) в пространстве, попарные расстояния между которыми равны 1, 1, 1, 1, 1, α?

Из решения задачи-3-17 ясно, что ответ на вопрос а) такой: только при $\alpha = \sqrt{3}$. Из того же решения следует ответ на вопрос б): при $0 < \alpha \leq \sqrt{3}$. В самом деле, перегибая в пространстве ромб вдоль его меньшей диагонали, мы убеждаемся, что расстояние между его противоположными вершинами может изменяться от $\sqrt{3}$ до 0.

Для знатоков. Сделаем еще одно наблюдение: при $\sqrt{3} < \alpha \le 2$ для любых трех из данных четырех точек выполняются неравенства треугольника (длина большей стороны не превосходит суммы длин двух других), однако в пространстве (и даже в n-мерном евклидовом пространстве) не существует четырех точек с такими попарными расстояниями.

Можно поставить более общий вопрос: можно ли расположить а) на плоскости; б) в пространстве четыре точки 1, 2, 3, 4 так, чтобы попарные расстояния между ними были равны данным числам $r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}$ (r_{ij} – расстояние между точками j и i)? Безусловно, все числа r_{ij} должны быть неотрицательными и удовлетворять неравенствам треугольника $r_{ij} + r_{jk} \ge r_{ik}$. Но этого мало. Для утвердительного ответа на вопрос б) необходимо и достаточно, чтобы еще был неотрицательным определитель

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & r_{14}^2 & 1 \\ r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 & r_{24}^2 & 1 \\ r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 & r_{34}^2 & 1 \\ r_{14}^2 & r_{24}^2 & r_{34}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

а для возможности расположения на плоскости (вопрос а)) нужно, чтобы определитель Δ_4 равнялся 0.

Если четыре точки 1, 2, 3, 4 размещены в пространстве, то $\Delta_4 = 2^3 (3!)^2 V^2 = 288V^2$, где V – объем тетраэдра с вершинами в этих точках. Отсюда ясно, что условие $\Delta_4 \ge 0$ необходимо для возможности размещения точек в пространстве.

Объясним, почему условия $r_{ij} \ge 0$, $r_{ij} + r_{jk} \ge r_{ik}$, $\Delta_4 \ge 0$ достаточны для этого. Если зафиксировать все расстояния, кроме r_{34}, то треугольники 123 и 124 можно вращать вокруг общего ребра 12 (двугранный угол φ между ними меняется от $0°$ до $180°$). Тогда Δ_4 как функция от $x = r_{34}^2$ будет квадратным трехчленом с отрицательным старшим коэффициентом. Его корни соответствуют тем значениям x, при которых треугольники лежат в одной плоскости ($\varphi = 0°$ и $\varphi = 180°$). Когда φ меняется от $0°$ до $180°$, величина x пробегает все значения между корнями, т.е. все значения, для которых $\Delta_4(x) \ge 0$.

Заметим, кстати, что аналогичным образом с помощью определителя можно записать и формулу Герона для площади S треугольника со сторонами r_{12}, r_{13}, r_{23}:

$$S^2 = \Delta_3 \Big/ \left(2^2 (2!)^2\right) = \Delta_3/16,$$