

*Статьи из журнала «Квант»*

38. Ашманов С. Числа и многочлены. – 1980, № 2.  
39. Балк М. Поиск решения. – 1976, № 9.  
40. Балк К, Балк М., Болтянский В. Метод малых шевелений. – 1979, № 4.  
41. Башмаков М. Любите ли вы возиться с целыми числами? – 1971, №3.  
42. Беве Л. Мини-геометрия. – 1976, №6.  
43. Болтянский В.Г. Шесть зайцев в пяти клетках. – 1977, №2.  
44. Болтянский В.Г. Метод итераций. – 1983, № 3.  
45. Брудно А.Л. Вокруг циркуля. – 1974, № 10.  
46. Вагутен В.Н. Близкие дроби. – 1975, № 7.  
47. Варнаховский Ф.Л., Колмогоров А.Н. О решении 10-й проблемы Гильберта. – 1970, № 7.  
48. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л. Пары чисел и действия с ними. – 1985, № 1.  
49. Вертгейм Б. Метод неподвижных точек. – 1980, № 6.  
50. Залгаллер В. Непрерывно изгибаемый многогранник. – 1978, № 9.  
51. Кириллов А.А. О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма. – 1977. № 7.  
52. Крейн М.Г. Диофантово уравнение Маркова. – 1985, № 4.  
53. Курдюмов Г. Консервативность бесконечного строя. – 1979, № 7.  
54. Матиясевич Ю.В. Формулы для простых чисел. – 1976, № 5.  
55. Милг А.А. Что сказал проводник. – 1973, № 8.  
56. Нестеренко Ю.В., Никишин Е.М. Очерк о цепных дробях. – 1983, № 5, 6.  
57. Раббот Ж.М. Знаете ли вы, что  $220 \text{ вольт} / 127 \text{ вольт} \approx \sqrt{3}$ ? – 1978, № 11.  
58. Тоом А.Л. Из жизни единиц. – 1974, № 9.  
59. Тоом А.Л., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М. Решения задач из задачника «Кванта». – 1970, № 8.  
60. Фолин С.В. Разложение на множители. – 1983, № 7.  
61. Фукс Д.Б., Фукс М.Б. О наилучших приближениях. – 1971, № 6, 11.  
62. Яглом И.М. О хордах непрерывных кривых. – 1977, № 4.

*Книги из серии «Популярные лекции по математике». – М.: Наука*

63. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – 1983.  
64. Виленкин Н.Я. Метод последовательных приближений. – 1968.

65. *Гельфонд А.О.* Решение уравнений в целых числах. – 1983.  
 66. *Калужни Л.А.* Основная теорема арифметики. – 1969.  
 67. *Коровкин П.П.* Введение в неравенства. – 1983.  
 68. *Костовский А.Н.* Геометрические построения одним циркулем. – 1984.  
 69. *Маркушевич А.И.* Возвратные последовательности. – 1983.  
 70. *Смогоржевский А.С.* Линейка в геометрических построениях. – 1957.  
 71. *Успенский В.А.* Треугольник Паскаля. – 1979.  
 72. *Шашкин Ю.А.* Эйлерова характеристика. – 1984.

*Книги из серии «Занимательная математика». – М.: Мир*

73. *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. – 1971.  
 74. *Гарднер М.* Математические досуги. – 1972.  
 75. *Гарднер М.* Математические новеллы. – 1974.  
 76. Математический цветник. – 1983.

*Учебники, статьи, монографии*

77. *Алексеев В.Б.* Теорема Абеля в задачах и решениях. – М.: Наука, 1976.  
 78. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г.* Парадоксы мира нестационарных структур/Новое в жизни, науке, технике. Серия «Математика, кибернетика». – М.: Знание, 1985.  
 79. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Физматлит, 1974.  
 80. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. – М.: Мир, 1965.  
 81. *Башмакова И.Г.* Диофант и диофантовы уравнения. – М.: Наука, 1972.  
 82. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. – М.: Наука, 1985.  
 83. *Берже М.* Геометрия, ч. I, II. – М.: Мир, 1984.  
 84. *Бурбаки Н.* Теория множеств. – М.: Мир, 1970.  
 85. *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. – М.: Наука, 1979.  
 86. *Вебер Г., Вельштейн И.* Энциклопедия элементарной математики. Т. 1–3. – Одесса: Матезис, 1906, Гл. II, §101.  
 87. *Виленкин Н.Я.* Комбинаторика. – М.: Физматлит, 1969.  
 88. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. – М.: Наука, 1972.  
 89. *Гарднер М.* Математические чудеса и тайны. – М.: Наука, 1986.  
 90. *Гильберт Д.* Основания геометрии. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948.  
 91. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. – М.: Наука, 1981.

92. *Зыков А.А.* Введение в теорию графов. – М.: Наука.
93. *Кордемский Б.А.* Математическая смекалка. – М.: Наука, 1965.
94. *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Т. 1–3. – М.: Мир, 1976–1978.
95. *Кокстер Г.С., Грейтцер С.Л.* Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978.
96. *Кокстер Г.С.* Введение в геометрию. – М.: Наука, 1966.
97. *Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М.* Дискретная математика для инженера. – М.: Энергия, 1960.
98. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика. – М.: Просвещение, 1968.
99. *Люстерник Л.А.* Выпуклые фигуры и многогранники. – М.: Гостехиздат, 1956.
100. *Манин Ю.И.* Вычислимое и невычислимое. – М.: Советское радио, 1980.
101. *Манин Ю.И.* Доказуемое и недоказуемое. – М.: Советское радио, 1979.
102. *Маршал А., Олкин И.* Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. – М.: Мир, 1983.
103. *Пойа Д.* Математическое открытие. – М.: Наука, 1970.
104. *Пойа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1978.
105. *Постников М.М.* Введение в теорию алгебраических чисел. – М.: Наука, 1982.
106. Проблемы Гильберта/Сб. под ред. П.С. Александрова. – М.: Наука, 1969.
107. *Розов Н.Х., Глаголева Е.Г., Работ Ж.М.* Заочная математическая школа при МГУ/Новое в жизни, науке, технике. Серия «Математика, кибернетика». – М.: Знание, 1973.
108. *Рыбников К.А.* Введение в комбинаторный анализ. – Изд-во МГУ, 1985.
109. *Серпинский В.* 250 задач по элементарной теории чисел. – М.: Просвещение, 1968.
110. *Синай Я.Г.* Динамические системы с упругими отражениями. – УМН, 1970, № 2.
111. *Синай Я.Г.* Случайность неслучайного. – Природа, 1981, № 3.
112. *Соминский И.С., Головина Л.И., Яглом И.М.* О математической индукции. – М.: Наука, 1967.
113. Странные аттракторы/Серия «Математика. Новое в зарубежной науке», вып. 22. – М.: Мир, 1981.
114. *Тихонов А.Н., Костомаров Д.П.* Рассказы о прикладной математике. – М.: Наука, 1979.

115. Тоом А., Гутенмахер В., Васильев Н., Раббот Ж. Задачи устного экзамена по математике. – М.: Изд-во МГУ, 1970.
116. Тот Л.Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. – М.: Физматгиз, 1958.
117. Фаддеев Д.К. Лекции по высшей алгебре. – М.: Наука, 1984.
118. Хинчин А.Я. Три жемчужины теории чисел. – М.: Наука, 1979.
119. Хинчин А.Я. Цепные дроби. – М.: Наука, 1978.
120. Холл М. Комбинаторика. – М.: Мир, 1970.
121. Яглом И.М. Булева структура и ее модели. – М.: Советское радио, 1980.
122. Живые числа: Сб. ст. 1981. г./Пер. с нем. – М.: Мир, 1985.

*Дополнительная литература к третьему изданию*

123. Zandman Felix, Simon Paul-Renй, Szwarc Joseph. Resistor theory and technology. – Vishay Intertechnology, Inc., 2002.
124. Матиясевич Ю. Десятая проблема Гильберта. – М.: Наука, 1993.
125. Острик В.В., Цфасман М.А. Алгебраическая геометрия и теория чисел. – М.: МЦНМО, 2001. – (Библиотека «Математическое просвещение»).
126. Панчишкин А.А. Локальные и глобальные методы в арифметике. – «Математическое просвещение», сер. 3, вып. 12, 2008.
127. Арнольд В.И. На сколько частей делят плоскость  $n$  прямых? – «Математическое просвещение», сер. 3, вып. 12, 2008.
128. Шашкин Ю.А. Эйлерова характеристика. – М.: Наука, 1984.
129. Fьredi Z.; Palбsti I. Arrangements of lines with a large number of triangles. – Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 92, Num. 4., Dec. 1984.
130. Borovik Alexandre V., Gelfand Israel M., White Neil. Coxeter Matroids (Progress in Mathematics). – Birkhduser Boston, 2007.
131. Винберг Э.Б. Калейдоскопы и группы отражений. – М.: МЦНМО, 2003. – («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 7).
132. Ионин Ю.И. Конечные проективные плоскости. – «Математическое просвещение», сер. 3, вып. 13, 2009.
133. Ionin Y.J., Shrikhande M.S. Combinatorics of Symmetric Designs. – Cambridge University Press, 2006.
134. Gardner M. Mathematical games. (1983) – Scientific American 249 (2), 8–13.
135. Akin E., Davis M. Bulgarian Solitaire. (1985) – American Mathematical Monthly, 4/ 237–260.
136. Igusa K. Solution of the Bulgarian solitaire conjectures. (1985) – Math. Mag. 58(5), 259–271.
137. Bentz H.-J. Proof of the Bulgarian solitaire conjectures. (1987) – Ars Combin. 23, 151–170.

138. *Притыкин Ю.Л.* Колмогоровская сложность. – «Математическое просвещение», сер. 3, вып. 13, 2009.

139. *Успенский В.А., Семенов А.Л., Шень А.* Может ли индивидуальная последовательность нулей и единиц быть случайной? – Успехи математических наук, 1990, 45(1).

140. *Гик Е.Я.* Шахматы и математика. – М.: Наука, 1983. – («Библиотечка Квант», вып.24).

## СОДЕРЖАНИЕ

---

Предисловие ко второму изданию .....	3
Предисловие к третьему изданию .....	4
§1. Задачи для первого знакомства .....	5
§2. Целые числа и многочлены .....	15
§3. Построения на плоскости и в пространстве .....	41
§4. Неравенства, экстремумы, оценки .....	72
§5. Необычные примеры и конструкции .....	99
§6. Последовательности и итерации .....	131
Указания к задачам для самостоятельного решения .....	159
Тематический указатель .....	169
Список литературы .....	179

*Николай Борисович Васильев, Виктор Львович Гутенмахер,  
Жозеф Михайлович Раббот, Андрей Леонович Тоом*

**ЗАОЧНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ**

Библиотечка «Квант<sup>+</sup>». Выпуск 121  
Приложение к журналу «Квант<sup>+</sup>» №3/2011

Редактор *А.Ю.Котова*

Обложка *А.Е.Пацхверия*

Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская  
Печать офсетная. Объем 6 печ.л. Тираж 2500 экз.  
Заказ №

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант<sup>+</sup>»  
Тел.: (495)930-56-48, e-mail: math@kvantjournal, phys@kvantjournal

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ППП «Типография «Наука»  
121099 Москва, Шубинский пер., д. 6



**ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ КНИГИ СЕРИИ  
«БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»**

---

1. *М.П.Бронштейн*. Атомы и электроны
2. *М.Фарадей*. История свечи
3. *О.Оре*. Приглашение в теорию чисел
4. Опыты в домашней лаборатории
5. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике
6. *Л.П.Мочалов*. Головоломки
7. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп
8. *В.Г.Штейнгауз*. Математический калейдоскоп
9. Замечательные ученые
10. *В.М.Глушков, В.Я.Валах*. Что такое ОГАС?
11. *Г.И.Копылов*. Всего лишь кинематика
12. *Я.А.Сморodinский*. Температура
13. *А.Е.Карпов, Е.Я.Гик*. Шахматный калейдоскоп
14. *С.Г.Гиндикин*. Рассказы о физиках и математиках
15. *А.А.Боровой*. Как регистрируют частицы
16. *М.И.Каганов, В.М.Цукерник*. Природа магнетизма
17. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: планиметрия
18. *Л.В.Тарасов, А.Н.Тарасова*. Беседы о преломлении света
19. *А.Л.Эфрос*. Физика и геометрия беспорядка
20. *С.А.Пикин, Л.М.Блинов*. Жидкие кристаллы
21. *В.Г.Болтянский, В.А.Ефремович*. Наглядная топология
22. *М.И.Башмаков, Б.М.Беккер, В.М.Гольховой*. Задачи по математике: алгебра и анализ
23. *А.Н.Колмогоров, И.Г.Журбенко, А.В.Прохоров*. Введение в теорию вероятностей
24. *Е.Я.Гик*. Шахматы и математика
25. *М.Д.Франк-Каменецкий*. Самая главная молекула
26. *В.С.Эдельман*. Вблизи абсолютного нуля
27. *С.Р.Филонович*. Самая большая скорость
28. *Б.С.Бокштейн*. Атомы блуждают по кристаллу
29. *А.В.Бялко*. Наша планета – Земля
30. *М.Н.Аршинов, Л.Е.Садовский*. Коды и математика
31. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: стереометрия
32. *В.А.Займовский, Т.Л.Колупаева*. Необычные свойства обычных металлов
33. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин*. Знакомство с полупроводниками

34. *В.Н.Дубровский, Я.А.Сморodinский, Е.Л.Сурков.* Релятивистский мир
35. *А.А.Михайлов.* Земля и ее вращение
36. *А.П.Пурмаль, Е.М.Слободецкая, С.О.Травин.* Как превращаются вещества
37. *Г.С.Воронов.* Штурм термоядерной крепости
38. *А.Д.Чернин.* Звезды и физика
39. *В.Б.Брагинский, А.Г.Полнарев.* Удивительная гравитация
40. *С.С.Хилькевич.* Физика вокруг нас
41. *Г.А.Звенигородский.* Первые уроки программирования
42. *Л.В.Тарасов.* Лазеры: действительность и надежды
43. *О.Ф.Кабардин, В.А.Орлов.* Международные физические олимпиады школьников
44. *Л.Е.Садовский, А.Л.Садовский.* Математика и спорт
45. *Л.Б.Окунь,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ... Z.* элементарное введение в физику элементарных частиц
46. *Я.Е.Гегузин.* Пузыри
47. *Л.С.Марочник.* Свидание с кометой
48. *А.Т.Филитов.* Многоликий солитон
49. *К.Ю.Богданов.* Физик в гостях у биолога
50. Занимательно о физике и математике
51. *Х.Рачлис.* Физика в ванне
52. *В.М.Липунов.* В мире двойных звезд
53. *И.К.Кикоин.* Рассказы о физике и физиках
54. *Л.С.Понтрягин.* Обобщения чисел
55. *И.Д.Данилов.* Секреты программируемого микрокалькулятора
56. *В.М.Тихомиров.* Рассказы о максимумах и минимумах
57. *А.А.Силин.* Трение и мы
58. *Л.А.Ашкинази.* Вакуум для науки и техники
59. *А.Д.Чернин.* Физика времени
60. Задачи московских физических олимпиад
61. *М.Б.Балк, В.Г.Болтянский.* Геометрия масс
62. *Р.Фейнман.* Характер физических законов
63. *Л.Г.Асламазов, А.А.Варламов.* Удивительная физика
64. *А.Н.Колмогоров.* Математика - наука и профессия
65. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин.* Барьеры: от кристалла до интегральной схемы
66. *Р.Фейнман.* КЭД – странная теория света и вещества
67. *Я.Б.Зельдович, М.Ю.Хлопов.* Драма идей в познании природы
68. *И.Д.Новиков.* Как взорвалась Вселенная
69. *М.Б.Беркинблит, Е.Г.Глаголева.* Электричество в живых организмах
70. *А.Л.Стасенко.* Физика полета

71. *А.С.Штейнберг*. Репортаж из мира сплавов
72. *В.Р.Полищук*. Как исследуют вещества
73. *Л.Кэрролл*. Логическая игра
74. *А.Ю.Гросберг, А.Р.Хохлов*. Физика в мире полимеров
75. *А.Б.Миздал*. Квантовая физика для больших и маленьких
76. *В.С.Гетман*. Визуки Солнца
77. *Г.А.Гальперин, А.Н.Земляков*. Математические бильярды
78. *В.Е.Белонучкин*. Кеплер, Ньютон и все-все-все...
79. *С.Р.Филонович*. Судьба классического закона
80. *М.П.Бронштейн*. Солнечное вещество
81. *А.И.Буздин, А.Р.Зильберман, С.С.Кротов*. Раз задача, два задача...
82. *Я.И.Перельман*. Знаете ли вы физику?
83. *Р.Хонсбергер*. Математические изюминки
84. *Ю.Р.Носов*. Дебют оптоэлектроники
85. *Г.Гамов*. Приключения мистера Томпкинса
86. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике (2-е изд.)
87. Физика и...
88. *А.В.Спивак*. Математический праздник
89. *Л.Г.Асламазов, И.Ш.Слободецкий*. Задачи и не только по физике
90. *П.Гнэдиг, Д.Хоньек, К.Райли*. Двести интригующих физических задач
91. *А.Л.Стасенко*. Физические основы полета
92. Задачник «Кванта». Математика. Часть 1
93. Математические турниры имени А.П.Савина
94. *В.И.Белотелов, А.К.Звездин*. Фотонные кристаллы и другие метаматериалы
95. Задачник «Кванта». Математика. Часть 2
96. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Физика
97. *А.А.Егоров, Ж.М.Раббот*. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика
98. *К.Ю.Богданов*. Прогулки с физикой
99. *П.В.Блиох*. Радиоволны на земле и в космосе
100. *Н.Б.Васильев, А.П.Савин, А.А.Егоров*. Избранные олимпиадные задачи. Математика
101. У истоков моей судьбы...
102. *А.В.Спивак*. Арифметика
103. *Я.А.Сморodinский*. Температура (3-е изд.)
104. *А.Н.Васильев*. История науки в коллекции монет
105. *И.Ф.Акулич*. Королевские прогулки
106. Исаак Константинович Кикоин в жизни и в «Кванте»
107. *Г.С.Голыцын*. Макро- и микромиры и гармония

108. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп (2-е изд.)
109. *А.В.Спивак*. Арифметика-2
110. *П.Г.Крюков*. Лазер – новый источник света
111. *А.Б.Сосинский*. Узлы. Хронология одной математической теории
112. *А.П.Пятаков, П.П.Григал*. Лаборатория на коленке
113. *А.А.Заславский*. Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина
114. *С.В.Коновалхин*. Сборник качественных задач по физике
115. *Е.Я.Гук*. Математика и шахматы
116. *Л.К.Белопухов*. Физика внезапного
117. *Н.Б.Васильев, А.А.Егоров*. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 1
118. Задачник «Кванта». Физика. Часть 1
119. *Н.Б.Васильев, А.А.Егоров*. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 2
120. Задачник «Кванта». Физика. Часть 2