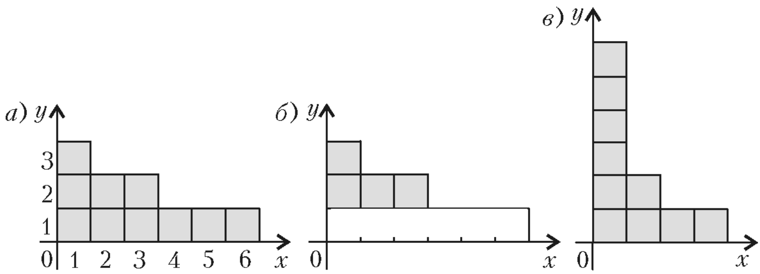
ральных чисел, начиная с 1, т.е. $n = 1 + 2 + \ldots + k = k(k+1)/2$ для некоторого k, то, начиная с некоторого дня, в ведомости все время будет повторяться запись $(k, k-1, k-2, \ldots, 2, 1)$. (В задаче 6-10 а) и б) так и было: $6 = 3 \cdot 4/2$, $10 = 4 \cdot 5/2$.) Если же число n не представляется в виде $k(k+1)/2$, то ведомость «зацикливается»: записи в ней начинают повторяться с периодом k таким, что $(k-1)k/2 < n < k(k+1)/2$.

Доказать этот результат и, кроме того, выяснить, какими будут циклы при $n \neq k(k+1)/2$, помогает следующая конструкция. Рассмотрим первую координатную четверть с нанесенной на нее координатной сеткой. Запись в ведомости $(k_1, k_2, \ldots, k_l)$, где $k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq \ldots \geq k_l$, изобразим так. Зачерним на рисунке столбик высотой k_1, рядом с ним – столбик высотой k_2, затем – высотой k_3 и т. д., до столбика высотой k_l (рис.80).

Процедуру, которую проделывает чиновник, на нашем рисунке удобно делать так.



$k_1 = 3, k_2 = k_3 = 2, k_4 = k_5 = k_6 = 1$

Рис. 80

Первый этап. Отрезаем нижнюю строчку от черной фигуры сдвигаем то, что осталось, на одну клетку вправо и вниз, отрезанную часть поворачиваем на $90°$ против часовой стрелки (превращаем отрезанную строчку в первый столбик).

Второй этап. Если новый первый столбик не самый высокий (ниже второго), то отрежем и передвинем справа налево те черные квадратики, для которых слева есть свободное место. В конце второго этапа столбики расположатся по росту.

Будем считать, что каждая черная клетка имеет две целочисленные координаты: номер столбца и номер строки, в которых она стоит.

Основное соображение. Когда выполняется первый этап, сумма координат каждой черной клетки не меняется, а когда выполняется второй этап, для передвигаемых клеток она уменьшается.

Рассмотрим теперь сумму обеих координат всех черных клеток. Эта сумма не меняется на первом этапе и уменьшается на втором. Отсюда следует, что второй этап можно повторить лишь конечное число раз (сумма координат клеток – целое и положительное число, поэтому она не может уменьшаться бесконечно). Значит, начиная с некоторого момента, будет происходить только первый этап. Следовательно, у каждой клетки сумма координат будет постоянной. С этого момента каждая клетка $(x; y)$ будет двигаться по циклу $(1; q-1) \to$ $\to (2; q-2) \to \ldots \to (q-1; 1) \to (1; q-1)$, который мы назовем *q-диагональю*.

При этом незаполненной может быть лишь одна последняя самая длинная диагональ. В самом деле, так как вторых этапов уже не происходит, то по q-диагонали черные квадраты «ходят» циклически с периодом q. Периоды в q-й и в $(q-1)$-й диагоналях отличаются на единицу. Поэтому не может случиться так, что в $(q-1)$-й диагонали есть пустые клетки, а в q-й диагонали рано или поздно оказался бы справа от пустой клетки и пришлось бы провести второй этап.

Итак, пустые места могут быть лишь в последней диагонали. Если $n = k(k+1)/2$, то все k диагоналей заполнятся; если $n \neq k(k+1)/2$, то, очевидно, будут циклы.

Ступенчатые фигуры, составленные из квадратиков, а также числовые таблицы такой формы, составленные из чисел 1, 2, ..., n, помогают решать многие задачи комбинаторики и алгебры, связанные с подсчетом разбиений натурального числа на натуральные слагаемые, теорией представлений группы перестановок и т.п. Они имеют специальное название – *диаграммы Юнга*.

Задача известна математикам под названием «Болгарский солитер» или «Болгарский пасьянс». Насколько нам известно, приведенное в тексте нашей книги решение принадлежит А. Тоому (1981 г.), затем (другое) ее решение было опубликовано в 1982 г. Более широкую известность она приобрела благодаря знаменитому популяризатору математики М.Гарднеру (см. [134]). Исчерпывающие сведения по этому вопросу можно найти в [135] – [137].

Задача **6-11.** *Ответ*: 144 числа.

Разобьем все десятизначные числа, удовлетворяющие условию, на две группы. К первой отнесем те числа, которые кончаются на 5, а ко второй – те, которые кончаются на 2.

Зачеркивая у всех чисел из первой группы последнюю цифру 5, мы получаем все девятизначные числа, у которых никакие две двойки не стоят рядом.

Зачеркивая у всех чисел из второй группы последние две цифры – 52, мы получаем все восьмизначные числа, у которых никакие две двойки не стоят рядом.

Обозначим количество n-значных чисел, состоящих из цифр 2 и 5, у которых никакие две двойки не стоят рядом, через a_n. Наше рассуждение показывает, что $a_{10} = a_9 + a_8$.

Заметим, что оно годится для любого $n \geq 3$, т.е.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Поскольку $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, то по этой формуле $a_3 = 5$, $a_4 = 8$, $a_5 = 13$ и т.д., $a_{10} = 144$.

∇ Последовательность a_n – это просто занумерованная с третьего члена последовательность Фибоначчи (F_n) 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., т.е. $a_n = F_{n+2}$ – см. обсуждение задачи 2-4,б).

Для *возвратных последовательностей*, у которых общий член задается линейной функцией от нескольких предыдущих, существует стандартная процедура, позволяющая находить явную формулу, задающую член такой последовательности как функцию от его номера. Продемонстрируем ее на последовательности Фибоначчи.

Ищем геометрическую прогрессию $u_k = a\lambda^k$, удовлетворяющую соотношению $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Получаем уравнение $\lambda^2 = \lambda + 1$. Находим его корни: $\lambda_{1,2} = \left(1 \pm \sqrt{5}\right)\big/2$. Таким образом, получаем две геометрические прогрессии вида $b\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ и $c\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Для последовательности, полученной их почленным сложением, также выполняется соотношение $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Теперь находим b и c так, чтобы формула

$$u_n = b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

годилась для начальных членов u_1, u_2.

Для последовательности Фибоначчи $u_1 = 1$ и $u_2 = 1$, откуда $b = -c = 1\big/\sqrt{5}$. Для последовательности (a_n) из задачи 6-11 получаем формулу

$$a_n = F_{n+2} = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}.$$

Задача **6-12**. а) *Ответ*: первый.

После того как из круга выйдут 32 человека, в нем останется 32 человека, и отсчет опять начнется с первого.

То же самое повторится снова: выйдут еще 16 человек и отсчет опять начнется с первого. Пройдя еще несколько раз по кругу, мы убеждаемся в том, что останется первый.

б) *Ответ*: 1925-й.

Как видно из решения задачи а), если по кругу стоят 2^n человек, то первый (тот, с кого начинается счет) останется в нем до конца. Пусть по кругу стоит 1986 человек. Будем идти по кругу, выводя их через одного, и остановимся в тот момент, когда из круга вышли 962 человека. В этот момент осталось $1986 - 962 = 1024 = 2^{10}$ ребят и первый из оставшихся имеет номер $2 \cdot 962 + 1 = 1925$. Он и останется в круге до конца.

∇ Для общей задачи − когда по кругу стоят N ребят − номер остающегося можно изящно определить с помощью двоичной системы счисления: нужно записать число N в двоичной системе и первую цифру (единицу) перенести в конец. Получится двоичная запись искомою номера «водящего».

Например: а) $64_{10} = 1000000_2 \to 0000001_2 = 1_{10}$;

б) $1986_{10} = 11111000010_2 \to 11110000101_2 = 1925_{10}$.

Было бы интересно найти решение аналогичной общей задачи, когда из круга выходит каждый m-й (в конце остается $(m-1)$ человек) (см. [94], упр. 1.3.2-22 и 5.1.1-2).

Задача **6-13**. а) Ответ: 0.

Будем писать для удобства так: $\overline{0} = 1$ и $\overline{1} = 0$.

Обозначим $(n+1)$-й член построенной последовательности через x_n: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, … Нам надо найти x_{1986}.

На каждом шаге построения последовательности ее длина удваивается. Выясним, на каком шаге появится член x_{1986}. После 10 шагов мы получим 2^{10} = 1024 члена последовательности, поэтому нам надо сделать 11 шагов. На 11-м шаге мы должны приписать те же члены, что были до этого, и заменить 0 на 1, а 1 − на 0, следовательно, $x_{1986} = \overline{x}_{962}$ $(1986 - 1024 = 962)$. Рассуждая так же, мы найдем, что $\overline{x}_{962} = x_{450}$ $\left(962 - 2^9 = 450\right)$, и т.д. В результате получаем цепочку равенств

$$x_{1986} = \overline{x}_{962} = x_{450} = \overline{x}_{194} = x_{66} = \overline{x}_2 = x_0 = 0\,.$$

∇ При решении задачи 6-13 а) мы фактически пользовались таким свойством данной последовательности:

1°. $x_n = \overline{x}_{n-2^k}$, где $2^k \le n < 2^{k+1}$.

Другое решение этой задачи можно получить, опираясь на следующие свойства нашей последовательности, которые будут использованы и в решении задачи б): для всех n

2°. $x_{2n} = x_n$;

3°. $x_{2n+1} = \overline{x}_{2n}$.

б) *Ответ*: непериодична.

Для доказательства заметим, что последовательность можно строить по новому правилу: вначале есть пара (0; 1), затем к ней приписывается пара (1; 0), затем две пары: (1; 0), (0; 1) и т. д.: на каждом шаге к уже имеющимся парам приписывается столько же новых пар, которые получаются из старых заменой каждой пары (0; 1) на пару (1; 0), а (1; 0) – на (0; 1).

Допустим теперь, что данная последовательность периодична и k – длина ее наименьшего периода.

Пусть сначала $k = 2p$ – четное число. Тогда периодичность последовательности означает, что существует такое натуральное N, что при всех $n \geq N$ выполняется равенство $x_n = x_{n+2p}$. Но из нового правила вытекает, что если разбить нашу последовательность на пары (x_0, x_1); (x_2, x_3), ..., (x_{2n}, x_{2n+1}), ..., то первые члены всех пар составляют последовательность $x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{2n}, \ldots$, которая совпадает с исходной (свойство $2°$). Отсюда получаем $x_n = x_{2n} = x_{2n+2p} = x_{2(n+p)} = x_{n+p}$, т.е. у последовательности есть период p, что противоречит тому, что $2p$ – наименьший период.

Пусть теперь $k = 2p + 1$ – нечетное число. Тогда в куске последовательности длины k разное число нулей и единиц. Предположим, что количество единиц больше – по крайней мере $p + 1$ (случай, когда количество нулей больше, рассматривается аналогично).

Рассмотрим кусок последовательности длиной $2k$. В нем содержится не меньше чем $2p + 2$ единиц, а нулей – не больше чем $2p$, т.е. единиц по крайней мере на 2 штуки больше. Но из нового правила вытекает, что $x_{2n+1} = \bar{x}_{2n}$ (свойство $3°$). Поэтому во всяком куске нашей последовательности, начинающемся с x_{2m}, число единиц отличается от числа нулей не больше чем на единицу. Значит, последовательность непериодична.

∇ Эта последовательность называется *последовательностью Морса* и часто встречается в разных областях математики (см. задачу 6-18).

Общий ее член можно определить так: если запись числа n в двоичной системе счисления содержит четное число единиц, то $x_n = 0$; если же нечетное – то $x_n = 1$.

Аналогичная последовательность получается из тройки 001, если не удваивать, а утраивать куски:

001 001 110001 001 110 110 110001...

Эта последовательность называется «вальсом бесконечного порядка», и, скользя по ней взглядом, можно как бы услышать мелодию вальса.

Интерес к таким последовательностям связан, в частности, с *теорией сложности по Колмогорову.* Обе приведенные последовательности, будучи отнюдь не случайными, обладают некоторыми свойствами, требуемыми от таблиц случайных чисел. Так, доля единиц среди первых k членов каждой из этих двух последовательностей стремится к половине при $k \to \infty$ (см. [138]).

Рассматриваемая последовательность впервые была построена в 1851 г. Пруэ (P.Prouhet), применившим ее в теории чисел, но ограничившимся этими применениями, не затронувшими многие интересные, уникальные свойства этой последовательности.

В 1906 г. Аксель Туэ, занимавшийся комбинаторикой, заново открыл эту последовательность, но его работа не получила широкого отклика и известности.

В 1921 г. снова открывает эту последовательность Марсон Морс, занимавшийся дифференциальной геометрией.

С тех пор ее открывали независимо много раз. Интересно, что чемпион мира по шахматам гроссмейстер Макс Эйве открыл ее применение в шахматах. Он показал, как можно играть бесконечно, не нарушая правил ничьей. Впрочем, здесь имеются некоторые тонкости, связанные с шахматными правилами (см. книгу [140]).

Последовательность Морса–Туэ – простейший пример *фрактала*. Поэтому она обладает рядом симметрий, в частности, не меняется при удалении всех элементов, стоящих на четных местах.

Из других ее свойств отметим, что в ней не встречаются подряд три одинаковых куска, т.е. в ней нельзя встретить фрагмент AAA, где A – любая конечная последовательность нулей и единиц.

Имеется число τ, двоичная запись которого – последовательность Морса–Туэ, оно называется числом Пруэ–Туэ–Морса;

$$\tau = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_i}{2^{i+1}} = 0,412454033640\ldots,$$

где t_i – элементы последовательности Морса–Туэ. Как доказал в 1929 г. K.Mahler, это число трансцендентно, т.е. не является корнем какого-либо многочлена с целыми коэффициентами.

Рассматриваются также обобщения последовательности Морса–Туэ как на произвольный алфавит (т.е. вместо нулей и единиц можно рассматривать n произвольных символов), так и на многомерный случай (например, двумерная последовательность – матрица, получающаяся из предыдущей преобразованием $1 \to \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$; $0 \to \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$, см. [139]).

Задача **6-14**. *Ответ*: либо у А было число 20, а у Б – число 21, либо у А – число 21, а у Б – число 22.

Нижеследующая таблица поясняет, какие выводы может сделать умный зритель (например, мы с вами) и делали А и Б на основании каждой реплики (реплики даны сокращенно).

№ репл.	*Реплика*	*Вывод из реплики*	*Наш комментрий*
$1_А$	А:«Я не знаю, что у тебя».	У А не число 1.	Иначе А знал бы, что у Б число 2.
$1_Б$	Б:«Я не знаю, что у тебя».	У Б не 1 и не 2.	Если бы у Б была 1, то он знал бы, что у А – число 2, а если бы у Б было 2, то, учитывая информацию из предыдущей реплики, Б знал бы, что у А число 3.
$2_А$	А:«Я не знаю, что у тебя».	У А не 1, не 2 и не 3.	Иначе А знал бы, учитывая предыдущие выводы, что у Б соответственно или 3, или 4.
$2_Б$	Б:«Я не знаю, что у тебя».	У Б не 1, не 2 и не 3 и не 4.	
. . .	. . .	. . .	. . .
$10_А$	А:«Я не знаю, что у тебя».	У А не 1, не 2, не 3,..., не 19.	
$10_Б$	Б:«Я не знаю, что у тебя».	У Б не 1, не 2, не 3,...,не 20.	
$11_А$	А:«Я не знаю, что у тебя».	Либо у А число 20, тогда у Б – число 21, либо у А число 21, тогда у Б – число 22.	

∇ Решая эту задачу, мы использовали соображения типа «А думает, что Б думает, что...». Подобные многократные отражения действительности в умах людей (похожие на многократные отражения в зеркалах) в последнее время привлекли внимание ученых и обсуждаются под названием «рефлексивных отражений» (латинское слово reflexus означает «отраженный»)[2].

Из математических задач, где участвуют рефлексивные рассуждения, назовем серию задач «о мудрецах с запачканными лбами» (см. об этом, например, [55]).

Задача **6-15**. Рассмотрим отображение f, переводящее большую карту K_0 в меньшую карту K_1; каждой точке, изображающей некоторый пункт на карте K_0 $(K_0 \supset K_1)$, ставится в соответствие точка, изображающая тот же пункт на карте K_1. Обозначим через K_2 образ карты K_1 при этом же отображении (рис.81) и вообще положим $f(K_{n-1}) = K_n$, n = 1, 2, ... Прямоугольники K_0, K_1, K_2, ..., K_n, ... имеют ровно одну общую точку x, поскольку размеры прямоугольников стремятся к нулю.

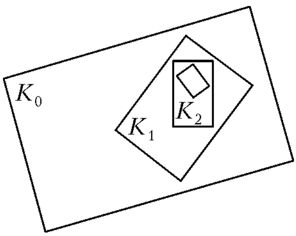


Рис. 81

Точка x и есть нужная точка прокола. Действительно, из того, что $x \in K_{n-1}$, следует, что $f(x) \in K_n$ (для любого n). Тем самым точка $f(x)$ тоже принадлежит всем прямоугольникам, а такая точка одна, поэтому $x = f(x)$.

∇ Вообще, верна такая **теорема**: *любое непрерывное отображение прямоугольника в себя имеет неподвижную точку.* Так что утверждение задачи 6-15 останется верным, даже если одну карту смять и положить на другую карту (см. [30, 44, 98]).

К нашей задаче (когда карта не смята) возможен и другой подход. Можно представить меньшую карту как полученную из большей при помощи геометрического преобразования − композиции гомотетии и поворота. Если плоскость, на которой лежат карты, представить как комплексную плоскость, то такое преобразование представляется линейной функцией $w(z) = qz + b$, где q, b, z − комплексные числа и $q \neq 0$, 1.

Тогда неподвижная точка z_0 находится как решение уравнения $z = qz + b$, т.е. $z_0 = \dfrac{b}{1-q}$.

Задача **6-16**. *Ответ*: предел равен $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$.

---

[2] См. статью: Тоом А.Л. На пути к рефлексивному анализу художественной прозы// Семиотика и информатика. Вып. 17. − М.: ВИНИТИ, 1981.

Данная последовательность (a_n) задается условиями $a_1 = \sqrt{1}$, $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$.

Сначала предположим, что у нее есть предел τ. Поскольку $\lim a_{n+1} = \lim a_n = \tau$, перейдем в равенстве $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ к пределу и получим $\tau = \sqrt{1+\tau}$. Возводя в квадрат обе части полученного равенства, приходим к квадратному уравнению $\tau^2 - \tau - 1 = 0$ при условии, что $\tau > 0$. Корнями этого уравнения будут числа $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$ и $\left(1-\sqrt{5}\right)/2$, и, следовательно, $\tau = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$.

Докажем теперь, что последовательность (a_n) монотонно возрастает и все ее члены не больше числа τ; отсюда, по теореме Вейерштрасса, будет следовать, что она имеет предел. Доказательство проведем по индукции.

База индукции: $a_1 < a_2 < \tau$, т.е. $1 < \sqrt{1+\sqrt{1}} < \left(1+\sqrt{5}\right)/2$. Здесь оба неравенства можно проверить почленным возведением в квадрат.

Теперь проделаем индукционный переход: предположим, что $a_{k-1} < a_k < \tau$, и докажем, что $a_k < a_{k+1} < \tau$.

Неравенство $a_k < a_{k+1}$ эквивалентно неравенству $\sqrt{1+a_{k-1}} < \sqrt{1+a_k}$. Последнее неравенство верно, так как по предположению индукции $a_{k-1} < a_k$.

Неравенство $a_{k+1} < \tau$, или $\sqrt{1+a_{k-1}} < \tau$, эквивалентно неравенству $a_k < \tau^2 - 1$. Так как $\tau^2 - \tau - 1 = 0$, то $\tau^2 - 1 = \tau$ и, следовательно, $a_k < \tau$.

Доказательство по индукции закончено.

∇ Заметим, что предел мы обозначили греческой буквой τ (тау), поскольку так принято обозначать замечательное число $\left(\sqrt{5}+1\right)/2$ (см. задачу 3-14).

Если рассмотреть функцию $f(x) = \sqrt{1+x}$, то последовательность из задачи 6-16 можно представить себе как последовательность $f(0)$, $f(f(0))$, $f(f(f(0)))$, ...

Поведение последовательностей вида x_0, $f(x_0)$, $f(f(x_0))$, $f(f(f(x_0)))$, ... удобно изучать графически. В одной системе координат чертятся график функции $y = f(x)$ и прямая $y = x$. Тогда нашей последовательности соответствует геометрическая процедура, изображенная на рисунке 82. Из точки M_0 $(x_0; 0)$ на оси Ox проводим вертикальную прямую до пересечения с графиком функции $y = f(x)$. Точка пересечения имеет координаты $N_0 = (x_0; f(x_0))$. Из этой точки проводим горизонтальную прямую до пересечения с прямой $y = x$ в точке $M_1 = \left(f\left(x_0\right); f\left(x_0\right)\right)$. Из этой точки снова проводим вертикальную прямую до пересечения с графиком функции $y = f\left(x\right)$ в точке $N_1 = \left(f\left(x_0\right); f\left(f\left(x_0\right)\right)\right)$ и т.д. Абсциссы точек $N_0, N_1, \ldots$ (или ординаты точек $M_0, M_1, \ldots$) являются членами нашей последовательности.

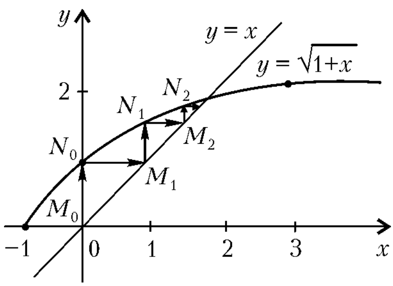


Рис. 82

На рисунке 82 изображен график функции $f\left(x\right) = \sqrt{1+x}$ из задачи 6-16. Мы видим, что члены последовательности растут и стремятся к числу τ, где τ – абсцисса точки пересечения графика функции $f\left(x\right) = \sqrt{1+x}$ с прямой $y = x$. Вычисляя по формуле $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$ один за другим члены этой последовательности, начиная с $x_0 = 0$, мы тем самым находим все с большей точностью корень τ уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Это наблюдение поясняет следующий прием приближенного решения уравнений. Уравнение $F\left(x\right) = 0$ переписывается в виде $x = f\left(x\right)$. Выбирается число x_0 и один за другим находятся члены последовательности x_n по формуле $x_{n+1} = f\left(x_n\right)$ при $n \geq 1$. Этот метод нахождения корней уравнения называется *методом итераций* или *методом последовательных приближений* (см. [44, 64]).

Задача **6-17**. *Ответ*: $\left(\sqrt{5}+1\right)\big/2$.

Заметим, что все члены a_k последовательности положительны и что число $\tau = \left(\sqrt{5}+1\right)\big/2$ является корнем уравнения $\tau = 1 + \dfrac{1}{\tau}$. Покажем, что если $a_k < \tau$, то $a_{k+1} > \tau$ и $a_{k+2} < \tau$.

Из неравенства $a_k < \tau$ вытекают следующие соотношения:

$$\frac{1}{a_k} > \frac{1}{\tau},\ \ a_{k+1} = 1 + \frac{1}{a_k} > 1 + \frac{1}{\tau} = \tau,$$

$$\frac{1}{a_{k+1}} < \frac{1}{\tau}\ \text{ и }\ a_{k+2} = 1 + \frac{1}{a_{k+1}} < 1 + \frac{1}{\tau} = \tau.$$

∇ Рассмотрим функцию $f\left(x\right) = 1 + \dfrac{1}{x}$. Последовательность из задачи 6-17 есть последовательность $f\left(1\right), f\left(f\left(1\right)\right), \ldots$ Поведение этой последовательности можно представить графически так же, как и в предыдущей задаче (рис. 83).

Для знатоков. Знатоки, конечно, заметили, что последовательность, рассмотренную в задаче 6-17, можно задать так: $a_n = F_{n+1}/F_n$, где F_k – k-член последовательности Фибоначчи (см. обсуждение задачи 6-11), т.е. a_n – подходящие дроби

$$1,\ 1+\frac{1}{1},\ 1+\frac{1}{1+1},\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}$$

разложения числа τ в бесконечную цепную дробь (см. [63]).

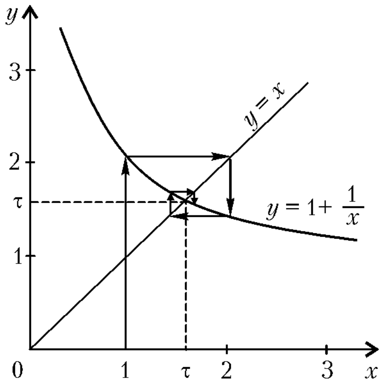


Рис. 83

Задача **6-18**. *Ответ*:

$$(0; 2),\ (2; 0),\ \left(-1+\sqrt{5}; -1+\sqrt{5}\right),\ \left(-1-\sqrt{5}; -1-\sqrt{5}\right).$$

Подставив $y = \left(4 - x^2\right)/2$ из первого уравнения во второе, получим уравнение четвертой степени

$$2x = 4 - \left(2 - x^2/2\right)^2,$$

откуда $x^4/4 - 2x^2 + 2x = 0$, или $x(x-2)\left(x^2 + 2x - 4\right) = 0$. Решив это уравнение, найдем ответ.

∇ Рассмотрим более общую систему уравнений вида

$$y = f(x),$$
$$x = f(y)$$

(в задаче 6-18 $f(x) = \left(4 - x^2\right)/2$).

Подставляя y из первого уравнения во второе, сведем задачу к решению уравнения $x = f(f(x))$.

Ясно, что если x – неподвижная точка отображения f, т.е. $f(x) = x$, то $f(f(x)) = f(x) = x$. Поэтому среди корней уравнения $x = f(f(x))$ будут все корни уравнения $f(x) = x$. В задаче 6-18 уравнение $x = f(x)$ имеет вид $x = \left(4 - x^2\right)/2$ и его корни $x = -1 \pm \sqrt{5}$ дают два решения исходной системы.

Два других ее решения, $x = 0$, $x = 2$, образуют «цикл» периода 2.

Для знатоков. Рассмотрим систему более общего вида:

$$\begin{aligned} 2x_2 &= a - x_1^2, \\ 2x_3 &= a - x_2^2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ 2x_p &= a - x_{p-1}^2, \\ 2x_1 &= a - x_p^2. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Обозначим отображение $x \to \left(a - x^2\right)/2$ через f, а n-кратную итерацию этого отображения – через f^n.

Будем называть последовательность

$$x_0, f(x_0), f\left(f(x_0)\right), \dots, f^n(x_0), \dots$$

орбитой точки x_0 при отображении f.

Орбита точки x_0 называется *периодической* (периода p), если $f^p(x_0) = x_0$ и $f^k(x_0) \neq x_0$ при $1 \le k < p$.

Наша система $(*)$ сводится к алгебраическому уравнению $f^p(x) = x$ степени 2^p. Вопрос о том, имеет ли эта система решение $\left(x_1, x_2, \dots, x_p\right)$ с p различными числами (при данных значениях параметра a), можно сформулировать так: имеет ли отображение f орбиту периода p? Этому вопросу и вообще изучению итераций непрерывных функций в последнее время посвящен ряд серьезных математических работ.

На примере семейства отображений $f_a(x) = \left(a - x^2\right)/2$ $(0 \le a \le 8)$ можно проследить многие интересные феномены, возникающие при итерациях отображений отрезка в себя, в частности поведение орбит разных точек.

Нетрудно видеть, что при $0 \le a \le 8$ наше отображение f_a переводит в себя отрезок $\left[-1 - \sqrt{1+a};\ -1 + \sqrt{1+a}\right]$ и имеет две «орбиты периода 1» (т.е. две неподвижные точки: $x = -1 \pm \sqrt{1+a}$). При $0 \le a \le 3$ других периодических орбит у отображения f_a нет. Можно доказать, что с возрастанием a начинают появляться орбиты с другими периодами: при $a > a_1 = 3$ – с периодом 2, при $a > a_2 = 5$ – с периодом 4, при $a > a_3 = 5{,}47\dots$ – с периодом 8 и т.д. Вообще, существует возрастающая последовательность чисел a_m такая, что при $a_m < a \le a_{m+1}$ отображение имеет орбиты каждого из периодов $1, 2, 2^2, \dots, 2^m$ и не имеет орбит с другими периодами. Эта последовательность сходится к критическому значению $a_\infty = 5{,}6046\ \dots$ (найденному с помощью ЭВМ), после которого характер типичных орбит резко меняется. При этом последовательность разностей $a_m - a_\infty$ ведет себя примерно как геометрическая прогрессия со знаменателем $\lambda = (4{,}66920\ldots)^{-1}$. (Точно так же и для многих других семейств непрерывных отображений возникают последовательности значений параметра a_m, при которых происходят «удвоения периодов», сходящиеся к критическим значениям a_∞, причем всегда разность $a_m - a_\infty$ стремится к нулю как прогрессия $b_m = c\lambda^m$, т.е. отношение $(a_m - a_{m-1})/(a_{m+1} - a_m)$ всегда стремится к одному и тому же пределу λ – постоянной Фейгенбаума.)

При $a < a_\infty$ поведение орбиты почти любой точки x сравнительно просто: если $a_m < a \le a_{m+1}$, то она приближается к некоторой орбите периода 2^m. Другим словами, при $p = 2^m$ и $a \le a_{m+1}$ одно решение нашей системы уравнений ($*$) можно найти методом последовательных приближений.

Например, для функции $f_4(x) = \left(4 - x^2\right)/2$ из задачи 6-18 легко убедиться, что орбита любой точки $x \in [-2;\, 2]$ приближается к орбите нуля (0; 2; 0; 2; …) периода 2.

При $a \ge a_\infty$ картина резко усложняется: орбиты многих точек x хаотически блуждают по некоторому бесконечному подмножеству отрезка. Например, при $a = a_\infty$ орбита нуля не приближается ни к какой периодической орбите; более того, даже последовательность (θ_n) знаков этих чисел непериодическая и имеет сложное строение (см. таблицу).

n	1	2	3	4	5	6	…
$f^n(0)$	2,80…	−1,12…	2,17…	0,44…	2,70…	−0,84…	…
θ_n	+	−	+	+	+	−	…

Интересно отметить, что эта *последовательность плюсов* и *минусов* θ_n *тесно связана с последовательностью Морса* из задачи 6-13. Оказывается, что если под каждой парой соседних членов последовательности Морса написать знак «+», если эти члены разные, и « – », если они одинаковые, то получится в точности последовательность θ_n :

$$\begin{array}{c} 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ldots \\ +\ -\ +\ +\ +\ -\ +\ -\ +\ -\ +\ +\ +\ \ldots \end{array}$$

При $a > a_\infty$ у отображения f_a появляются периодические орбиты не только периода 2^p. Какие в принципе периоды могут иметь орбиты данного отображения, показывает следующая **теорема Шарковского** (см. [78]).

Все натуральные числа упорядочиваются таким образом:

$$\underbrace{3, 5, 7, \ldots}_{\text{нечетные}};\ \underbrace{3\cdot 2, 5\cdot 2, 7\cdot 2, \ldots}_{\text{нечетные} \times 2};\ \underbrace{3\cdot 2^2, 5\cdot 2^2, 7\cdot 2^2, \ldots}_{\text{нечетные} \times 4};\ \underbrace{2^3, 2^2, 2, 1}_{\text{степени } 2}$$

Тогда про каждые два натуральных числа можно сказать, какое из них левее, а какое – правее. Если непрерывное отображение отрезка в себя имеет орбиту периода r, то оно имеет и орбиты всех периодов, стоящих правее, чем r.

Например, число 3 левее всех, и, в соответствии с этим, отображение, имеющее орбиту периода 3, имеет и орбиты всех периодов. Имеются и другие результаты о том, как могут меняться, в зависимости от параметра, свойства итераций у семейств непрерывных отображений отрезка в себя. Но многие наблюдения, полученные при помощи ЭВМ, еще ждут своего объяснения.

Интерес к этой тематике объясняется тем, что она тесно связана с исследованием сложного, хаотического (случайного), т.е. неустойчивого и непериодического, поведения динамических систем с тремя и более переменными, моделирующих самые разные физические процессы (см. [111, 113]).

Задачи для самостоятельного решения

6-19. а) Найдите 1986-ю цифру после запятой в десятичной записи числа $1/31$.

б) При каких натуральных $m < 31$ период десятичной записи числа $m/31$ будет состоять из тех же цифр, что и период числа $1/31$?

6-20. а) Учитель предлагает ученику делить столбиком 19 на 73. Какая цифра будет стоять на 100-м месте после запятой?

б) Пусть n – целое, $0 < n < 73$. Число $n/73$ разлагается в бесконечную десятичную дробь. Докажите, что в этой дроби не встречается двух одинаковых цифр, стоящих подряд.

в) Укажите все простые числа p, для которых в десятичных разложениях всех дробей n/p $(0 < n < p)$ нет двух одинаковых цифр, стоящих подряд.

6-21. Последовательность (a_n) задается так: $a_1 = 7$, a_{n+1} – сумма цифр числа a_n^2. Найдите a_{1000}.

6-22. Последовательность (a_n) задается так: a_1 – некоторое натуральное число, a_{n+1} – сумма квадратов цифр числа a_n, $n \geq 1$. Докажите, что в этой последовательности обязательно встретится одно из чисел 1 или 89.

6-23. Последовательность (x_n) задана своими первыми двумя членами $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ и условием

$$x_{n+1} = kx_n - x_{n-1}.$$

Имеет ли период эта последовательность, если:

а) $k = \sqrt{2}$; б) $k = \sqrt{3}$; в) $k = \left(\sqrt{5}+1\right)/2$; г) $k = \frac{3}{2}$?

6-24. Поток студентов пять раз сдавал один и тот же зачет (не сумевшие сдать зачет приходили на следующий день). Каждый день успешно сдавала зачет треть всех пришедших студентов и еще треть студента. Каково наименьшее возможное число студентов, так и не сдавших зачет за пять раз?

6-25. Жители островов Чунга и Чанга раз в год на праздник обмениваются драгоценностями. Жители Чунги привозят половину своих драгоценностей на остров Чанга, а жители Чанги одновременно привозят треть своих драгоценностей на остров Чунга. Так продолжается с незапамятных времен. Какая часть драгоценностей находится на каждом из островов? (Никаких новых драгоценностей за это время на островах не появилось, а старые не терялись.)

6-26. Решите систему

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_2^2, \\ x_2 &= 1 - x_3^2, \\ x_3 &= 1 - x_4^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= 1 - x_n^2, \\ x_n &= 1 - x_1^2. \end{aligned}$$

6-27. Найдите с точностью до 0,01 сотый член x_{100} последовательности (x_n), заданной условиями:

а) $x_1 \in [0; 1]$, $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, $n > 1$;

б) $x_1 \in [0,1; 0,9]$, $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$, $n > 1$.

6-28. Последовательность многочленов

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = x^2 - 1, \ldots$$

задается условием

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x).$$

Докажите, что уравнение $P_{100}(x) = 0$ имеет 100 различных действительных корней.

6-29. Муравей прополз по ломаной $H_0H_1H_2H_3\ldots$ из бесконечного числа звеньев $H_0H_1, H_1H_2, H_2H_3, \ldots$ Длины отрезков H_0H_1, H_1H_2 и H_0H_2 равны 5, 4 и 3 см; H_nH_{n+1} – перпендикуляр, опущенный из точки H_n на отрезок $H_{n-2}H_{n-1}$ ($n = 2, 3, 4, \ldots$).

а) Какое расстояние прополз муравей?

б) На каких расстояниях от отрезков H_0H_2 и H_0H_1 находится точка, в которую он приполз?

6-30. В последовательности треугольников длины сторон каждого последующего треугольника $A_nB_nC_n$ равны длинам медиан предыдущего треугольника $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Найдите длины сторон треугольника $A_{1000}B_{1000}C_{1000}$, если a, b, c – длины сторон треугольника $A_0B_0C_0$.

6-31. В круг радиуса 1 вписан квадрат, в него – круг, в него – правильный 8-угольник, в него – круг, в него – правильный 16-угольник, в него – круг и т.д.; в n-й круг вписан правильный 2^{n+1}-угольник. Докажите, что радиусы всех кругов больше $2/\pi$.

6-32. Последовательность (a_n) задана первым членом $a_1 = 1$ и условием $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n^2}$. Докажите, что:

а) эта последовательность не ограничена;

б) $a_{9000} > 30$.

в) Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \big/ \sqrt[3]{n}$.

6-33. Последовательность (a_n) задана первым членом $a_1 = 1$ и условием $a_{n+1} = \dfrac{3a_n}{4} + \dfrac{1}{a_n}$. Докажите, что:

а) последовательность ограничена;

б) $|a_{1000} - 2| < (3/4)^{1000}$.

6-34. Найдите предел последовательности (a_n), которая задается условиями: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{a_n^2}{8}$.

6-35. Из тройки чисел a, b, c образуем новую тройку

$$|a-b|,\ |b-c|,\ |c-a|,$$

затем из этой тройки по тому же правилу – следующую и т.д. Всегда ли среди полученных таким образом чисел встретится 0, если числа a, b, c: а) целые; б) не обязательно целые?

в) Те же вопросы для аналогичной операции над четверками чисел:

$$(a, b, c, d) \to (|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|).$$

6-36. Население города состоит из n человек, и каждый живет в отдельном домике. Однажды жители города решили обменяться своими домами. После обмена выяснились, что расстояние между новыми домами любых двух жителей не меньше, чем расстояние между их старыми домами. Докажите, что в результате обмена расстояния между домами любых двух жителей города не изменились.

6-37. Выписываются подряд все числа, кратные девяти:

9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117, ...

и для каждого из этих чисел находится сумма его цифр:

$$9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 18,\ 9,\ 9,\ \ldots \qquad (*)$$

Требуется указать закон, описывающий чередование чисел в последовательности $(*)$. На каком месте этой последовательности впервые появится число 81, и каково будет следующее за ним число? Что раньше встретится в этой последовательности – 4 раза подряд число 27 или 3 раза подряд число 36?

6-38. Отрезок числовой оси от 0 до 1 покрашен в зеленый цвет. Затем его средняя треть – отрезок $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$ – перекрашен в красный цвет; потом средняя треть каждого из оставшихся зелеными отрезков тоже перекрашена в красный цвет, с оставшимися четырьмя зелеными отрезками проделана та же операция, и так до бесконечности.

а) Найдите сумму длин красных отрезков.

б) Докажите, что число $1/4$ будет зеленым до самого конца.

в) Из суммы $\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81}+\ldots$ произвольным образом вычеркнуто бесконечное число слагаемых так, что осталось тоже бесконечно много слагаемых; докажите, что их сумма – зеленое число.

г) Докажите, что все остальные числа (между 0 и 1) красные.

6-39. Назовем *ломаной Дракона* бесконечную последовательность отрезков A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, ... (на плоскости), которая строится по следующему правилу. Сначала выбираются точки A_0 и A_1, отличные друг от друга. Потом последовательно, по шагам, строятся следующие точки. На k-м шаге, где $k = 1, 2, \ldots$, уже построенная ломанная $A_0A_1\ldots A_{2^{k-1}}$ поворачивается вокруг своей последней точки $A_{2^{k-1}}$ по часовой стрелке на $90°$. При этом повороте A_0 переходит в A_{2^k}, A_1 переходит в A_{2^k-1}, вообще A_m переходит в A_{2^k-m} при всех $m\in\left\{0, 1, \ldots, 2^{k-1}-1\right\}$. Так получается ломаная $A_0A_1\ldots A_{2^k}$, и затем делается следующий шаг (рис.84).

а) Постройте ломаную $A_0A_1\ldots A_{32}$.

б) Найдите общую формулу для последовательности расстояний A_0A_1, A_0A_2, A_0A_4, ..., $A_0A_{2^k}$, ...

в) Докажите, что ломаная Дракона ни по одному отрезку не проходит дважды.

г) Ломаную Дракона удобно рисовать на клетчатой бумаге

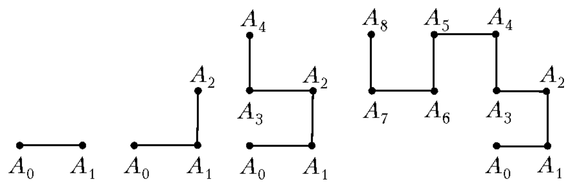


Рис. 84

(каждое звено – сторона клетки). Докажите, что четыре бесконечные ломаные Дракона, выходящие из одного узла клетчатой бумаги в четырех разных направлениях, проходят по всем отрезкам бесконечного листа клетчатой бумаги.

6-40. Гномы, живущие в белых и красных домиках, ежегодно одновременно красят свои домики, причем меняют цвет домика только те гномы, у кого больше половины друзей прожили последний год в домиках другого цвета. Докажите, что наступит год, начиная с которого цвет некоторых домиков вовсе не будет меняться, а остальных – будет меняться каждый год.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

2-23. Нужно выяснить, имеет ли уравнение $13x + 16y = 300$ решение в целых неотрицательных числах (см. 2-1, 2-6, с. 17, 21).

2-24. Отношение длин окружностей равно $40/18 = 20/9$. Поэтому гвоздь будет оставлять отметки через $9/20$ длины большей окружности (см. 2-8, с. 22).

2-25. См. 2-7, 2-8, с. 21–23.

2-26. Поскольку н.о.д. (360, 48) = 24, вопрос а) сводится к такому: существует ли фигура, которая при повороте вокруг точки O на $24°$ переходит в себя, а на $90°$ – нет?

2-27. См. 2-7, с. 21.

2-28. Можно проделать «спуск», похожий на алгоритм Евклида (см. 2-4, с. 18), используя следующие утверждения: $\text{н.о.д.}(a-b, b) = \text{н.о.д.}(a, b)$; $\text{н.о.д.}(a+b, b) = \text{н.о.д.}(a, b)$; если числа a и b нечетны, то $\text{н.о.д.}\left(2^k \cdot a, b\right) = \text{н.о.д.}(a, b)$.

∇ Отбрасывание лишней степени двойки – основная идея «бинарного алгоритма» отыскания наибольшего общего делителя, который для чисел в двоичной записи (принятой в ЭВМ) удобнее алгоритма Евклида (см. [94], т. 2, 4-5-2).

2-29. См. 2-4, с. 18.

2-30. Найдите сумму всех чисел в прямоугольнике двумя способами: «по строкам» и «по столбцам».

2-31. б) См. 2-9, 2-10, с. 23–24.

2-33. В равенстве $pq - p - q + 1 = 6$ левую часть можно разложить на множители.

2-34. б) См. 2-10, с. 24.

2-35. б) Число $n^3 - 1$ делится на $n - 1$.

2-36. а) Многочлен $x^2 - (y+1)^2$ можно разложить на множители; после этого надо рассмотреть всевозможные разложения числа 12 в произведение двух целых чисел одной четности.

2-38. См. 2-10, 2-16, с. 24, 28.

2-39. Если m и n не делятся на 5, то $m^4 - n^4$ делится на 5; это можно доказать, выяснив, какие остатки дают квадраты (и четвертые степени) при делении на 5.

2-40. Разложите $a^k - 1$ на множители, использовав формулу из решения задачи 2-17 б), с. 29, и используйте то, что остаток при делении a на k равен 1.

2-41. Три последние цифры любого натурального числа, большего 100, те же, что и 100-й степени числа из его последних трех цифр (и даже 100-й степени его последней цифры),

2-42. См. 2-13, с. 26.

2-43. См. 2-14, с. 27.

2-44. См. 2-15, с. 28.

2-45. а) $n^4+4=\left(n^2+2\right)^2-(2n)^2$. б) См. 2-18, с. 30.

2-47. Достаточно доказать, что этот многочлен делится на каждый из многочленов x, $x+1$, $2x+1$ (по теореме Безу, см, комментарий к 2-17 б), с. 30).

2-48. Можно выяснить, при каких a и b этот многочлен делится на $x-1$ (см. 2-17, с. 29–30), и выделить множитель $x-1$.

∇ Многочлен $p(x)$ делится на $(x-d)^2$ тогда и только тогда, когда он сам и его производная $p'(x)$ делятся на $x-d$.

2-49. Разделить многочлен $f(x)$ на $(x-1)(x-2)$ с остатком – значит представить его в виде

$$f(x)=g(x)(x-1)(x-2)+ax+b.$$

Найти числа a и b можно далее по теореме Безу (см. 2-17 б), с. 29).

2-50. Для любого многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами число $f(k)$ при четном k имеет ту же четность, что $f(0)$, а при нечетном k – ту же, что и $f(1)$.

2-51. Если многочлен с целыми коэффициентами имеет целый корень c, то его значение в целой точке d (при $c\neq d$) делится на $d-c$ (см. 2-17 б), с. 29).

2-52. Один из множителей должен быть многочленом третьей (или меньшей) степени. Такой многочлен не может принимать значение 1 в четырех или более точках (это следует из теоремы Безу). Докажите, что многочлен третьей степени не может принимать в трех целых точках значение 1 и в двух – значение -1.

2-53. а) Рассуждая так же, как в задаче 2-40, можно убедиться, что если $a^{5^m}+1$ делится на 5^m, то $a^{5^{m+1}}+1$ делится на 5^{m+1}.

2-54. Выкладывая карточки в ряд, нужно следить за четностью количества карточек каждого типа. Обозначим через x_k произведение первых k чисел. Оно представляется в виде

$$x_k=2^{\alpha_k}\cdot 3^{\beta_k}\cdot 5^{\gamma_k}\cdot 7^{\delta_k}\cdot y_k^2,$$

где y_k – натуральное число, а $S_k=(\alpha_k;\beta_k;\gamma_k;\delta_k)$ – набор из 0 и 1. Наборы S_m и S_{m+1} отличаются только в одном из четырех мест. Чтобы выполнялось условие задачи, нужно, чтобы ни один из этих наборов не состоял из одних нулей и никакие два набора S_m и S_n не совпадали при $m\neq n$. В самом деле, если какой-то набор S_k состоит из нулей, то произведение первых k чисел есть полный квадрат, а если какие-то два