Способ заполнения изображен на рисунке 75, разные цвета показаны на этом рисунке разной штриховкой.

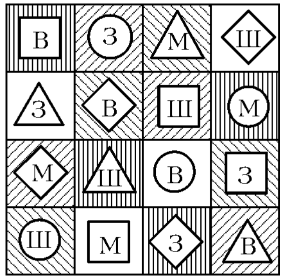

Рис. 75

∇ Когда n различных знаков записаны в таблицу $n \times n$ так, что в каждой строке и в каждом столбце стоят все различные знаки, говорят, что задан *латинский квадрат*. Два латинских квадрата A и B называются ортогональными, если в тех клетках, где в квадрате A стоит i-й знак, в квадрате В все знаки различны (и так для каждого (i = 1, 2, ..., n).

Наша задача состояла в том, чтобы построить три попарно ортогональных латинских квадрата 4×4 (один дает цвет, второй – форму рамки, а третий – букву).

Для знатоков. Чтобы составлять подобные квадратные таблицы (они бывают полезны в прикладных задачах, например при планировании многоцелевых экспериментов), удобно пользоваться понятием конечной *аффинной плоскости* (см. [42]).

Пусть F – конечное поле из q элементов; пары $(x;\ y)$ элементов F будем называть точками конечной аффинной плоскости, а множества вида $\{(x; y) : ax + by + c = 0\}$, где a, b, $c \in F$, причем a или b не равно нулю, – прямыми.

Всего получается q^2 точек и $q(q+1)$ прямых, причем они разбиваются на $q + 1$ семейств так, что в каждом семействе ровно q «параллельных» друг другу прямых, а через каждую точку проходит $q + 1$ прямая.

Например, одно семейство – это прямые $x + c = 0$, другое – $y + c = 0$, третье – $x + y + c = 0$, четвертое (если $q > 2$) – $x + 2y + c = 0$ и т.д.

Поставим в соответствие каждому из $q + 1$ семейств определенное свойство: «номер столбика», «номер строки», «буква», «форма рамки» и т.д. Припишем точкам каждой из q прямых первого семейства определенный номер строки, точкам каждой из прямых второго семейства – определенный номер столбца, третьего – букву, четвертого – форму рамки и т.д. Тогда мы получим способ узнать, в какую клетку таблицы $q \times q$ поместить каждую точку $(x;\ y)$, какой ей приписать цвет, какую букву и т.п. Каждые две непараллельные прямые пересекаются в одной точке, так что для каждых двух заданных свойств найдется ровно одна клетка с нужной парой свойств.

При $q = 4$ имеется конечное поле из элементов 0, 1, a, b, приводящее как раз к решению нашей задачи. Таблицы сложения и умножения в этом поле приведены ниже.

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

·	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

Можно показать, что существуют не более чем $n-1$ попарно ортогональных латинских квадратов порядка n. Более того, существование $n-1$ таких квадратов эквивалентно существованию проективной плоскости порядка n (о проективной плоскости см. в решении следующей задачи 5-21). Если n − простое число или степень простого числа, то проективная плоскость порядка n существует. Для других n существование проективной плоскости порядка n − нерешенная проблема.

В 1972 г. Леонард Эйлер предложил следующую задачу.

Можно ли построить 36 офицеров шести различных чинов, взятых из шести различных полков, в виде квадрата 6×6 так, чтобы каждый ряд и каждая колонна содержали бы офицеров каждого чина и из каждого полка?

Другими словами, Л.Эйлер спросил, существуют ли два ортогональных латинских квадрата порядка 6.

Можно показать, что если n при делении на 4 не дает остаток 2, то два ортогональных квадрата порядка n существуют. Л. Эйлер предположил, что если n дает при делении на 4 остаток 2, то таких квадратов не существует.

При n = 2 гипотезу Эйлера легко проверить, так что n = 6 − первый трудный случай. В 1900 г. Тарри проверил в этом случае указанную гипотезу, выписав все латинские квадраты порядка 6. В книге [133] приведено доказательство гипотезы Эйлера для n = 6, причем оно не основано на полном переборе.

Оказалось что для n > 6 гипотеза Эйлера неверна. В 1959 г. Паркер нашел два ортогональных латинских квадрата порядка 10, а годом позже его построение обобщили, и пара литинских квадратов порядка n была построена для всех $n\equiv 2 \pmod 4$, кроме, разумеется, n = 2 и n = 6.

О трех попарно ортогональных латинских квадратах почти ничего не известно. Первый неразрешенный случай − n = 10.

Задача **5-21**. а) *Ответ*: 4 или 6 занятий.

Из условия следует, что члены кружка ходят в кафе либо вдвоем, либо втроем.

Если они ходили каждый раз вдвоем, то занятий было 6. В самом деле, если занумеровать участников числами от 1 до 4, то ходить в кафе они могли только в таких сочетаниях: (1 2), (1 3), (1 4), (2 3), (2 4), (3 4).

Если же было хотя бы одно посещение кафе втроем, то, кроме него, было всего три посещения: каждый из этих троих мог ходить в кафе только с четвертым.

б) *Ответ*: могут быть расписания двух типов: (1 2 3 4 5 6), (1 7), (2 7), (3 7), (4 7), (5 7), (6 7) или (1 2 3), (1 4 7), (1 5 6), (2 5 7), (2 4 6), (3 6 7), (3 4 5).

Эти ситуации можно изобразить графически. На рисунке 76,*а* изображено первое расписание: горизонтальной прямой соответствует первое посещение кафе, а прямым, соединяющим точку 7 с другими точками, – остальные посещения.

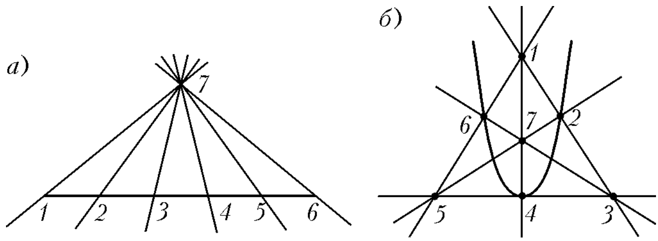

Рис. 76

Второе из приведенных расписаний иллюстрирует рисунок 76,*б*. Каждая линия на этом рисунке изображает одно посещение; номера точек, через которые она проходит, показывают состав учеников, посетивших в этот раз кафе.

∇ С этой задачей связаны такие общие вопросы.

Пусть в множестве E из n элементов выделены m различных подмножеств, отличных от самого E, так что для каждых двух элементов из E найдется ровно одно из выделенных подмножестп, в которое входят оба эти элемента.

Может ли быть $m < n$? Когда возможно равенство $m = n$? (См. [84], гл. III, § 5, упр. 12.)

Для знатоков. Докажем, что всегда $m \geq n$. Занумеруем все выделенные подмножества: $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и элементы множества E: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Каждому элементу a_i поставим в соответствие m-мерный вектор $a_i = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{im})$ следующим образом: $\lambda_{ij} = 0$, если элемент a_i не входит в множество A_j; $\lambda_{ij} = 1$, если этот элемент входит в A_j.

Из условия следует, что скалярное произведение любых двух таких векторов равно 1, т.е. $(a_i a_j) = 1$ при $i \neq j$, а скалярный квадрат вектора не меньше 2 (так как каждый элемент входит по крайней мере в 2 множества).

Допустим теперь, что $m < n$. Поскольку число n векторов a_i больше размерности пространства m, система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно зависима, т.е. уравнение

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = 0$$

имеет ненулевое решение. Последовательно умножая обе части этого уравнения скалярно на векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$, получим систему линейных уравнений вида

$$\begin{aligned} b_1 x_1 + \quad x_2 + \ldots + \quad x_n &= 0, \\ x_1 + b_2 x_2 + \ldots + \quad x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_1 + \quad x_2 + \ldots + b_n x_n &= 0, \end{aligned}$$

где все $b_i \geq 2$. Но эта система имеет только нулевое решение (ее определитель отличен от нуля), что противоречит нашему предположению. Таким образом, $m \geq n$.

Для равенства $m = n$ необходимо и достаточно, чтобы имел место один из следующих двух случаев:

1) в одно из выделенных подмножеств входят все элементы E, кроме одного, а остальные выделенные подмножества состоят из пар, образованных этим оставшимся элементом и всеми остальными;

2) число n представляется в виде $l(l-1)+1$, всякое выделенное подмножество состоит из l элементов, и всякий элемент множества E принадлежит ровно l подмножествам.

Заметим, что вопрос, когда реализуется случай 2), не решен. Система подмножеств множества E из обобщения ∇, удовлетворяющая условию 2), имеет специальное название: *конечная проективная плоскость порядка $q = l - 1$.*

Покажем, как построить конечную проективную плоскость порядка $q = p^k$ (для $n = p^{2k} + p^k + 1$), где p – простое число. Для этого нужно использовать «числа» из конечного поля порядка p^k.

Назовем точкой нашей плоскости тройку «чисел» (x_1, x_2, x_3), рассматриваемую с точностью до пропорциональности (т.е. тройки (x_1, x_2, x_3) и (cx_1, cx_2, cx_3) определяют одну и ту же точку). Договоримся тройку $(0;0;0)$ не считать точкой.

Пряная задается тройкой «чисел» (a_1, a_2, a_3) (кроме тройки $(0;0;0)$), рассматриваемой с точностью до пропорциональности. Точка (x_1, x_2, x_3) принадлежит прямой (a_1, a_2, a_3) в том и только в том случае, когда

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0\ .$$

Ясно, что построенная проективная плоскость дает реализацию случая 2). При этом точки плоскости – элементы множества E, прямые – выделенные подмножества. Число точек и число прямых одинаково, и каждые две точки принадлежат только одной прямой.

При $q = 2$ получается как раз тот пример проективной плоскости порядка 2, который изображен на рисунке 76,*б*.

В п. б) задачи 5-21 была построена нужная система множеств для случая $l = 3$, $n = 7$.

Подробнее о конечных проективных плоскостях написано, например, в статье [132].

Задачу 5–21 можно переформулировать в следующей эквивалентной форме.

Если в множестве X из m элементов выделены n подмножеств, любые два из которых имеют ровно один общий элемент, то $m \geq n$.

(X – это множество визитов в кафе; для каждого члена кружка a выделим множество всех визитов, включивших a.)

Эта формулировка допускает естественное обобщение.

Дано натуральное число λ и множество X из m элементов, в котором выделены n подмножеств, любые два из которых имеют ровно λ общих элементов. Тогда $m \geq n$.

Доказательство. Пусть Y – множество всех выделенных подмножеств множества X. Если $|A| = \lambda$ для какого-нибудь $A \in Y$, то A должно быть частью любого $B \in Y$. Если мы удалим A из X и из каждого B, мы получим разбиение множества $X \setminus A$ на n попарно непересекающихся подмножеств. Число таких подмножеств максимально, если одно из них пусто, а все остальные – одноэлементны. Поскольку $|X \setminus A| = m - \lambda$, мы получаем, что

$$n \leq m - \lambda + 1 \leq m.$$

Предположим, что $|A| > \lambda$ для каждого $A \in Y$. Пусть $X = \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$. Рассмотрим всевозможные линейные многочлены

$$f(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_m) = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_m z_m$$

с действительными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_m$. Они образуют векторное пространство размерности $m + 1$. Для каждого подмножества P множества X введем $f(P) = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, где $\alpha_i = 1$, если $i \in P$, и $\alpha_i = 0$, если $i \notin P$. Например, $f(\varnothing) = \alpha_0$, $f(X) = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$.

Для каждого $A \in Y$ рассмотрим многочлен $f_A = -\lambda + \sum_{i \in A} z_i$. Тогда $f_A(P) = -\lambda + |A \cap P|$ для любого подмножества P множества X. Поэтому, если $A, B \in Y$, то $f_A(B) = 0$ при $A \neq B$ и $f_A(A) = |A| - \lambda > 0$. Отсюда следует, что n многочленов f_A, $A \in Y$, линейно независимы.

В самом деле, если $\sum_{A \in Y} \alpha_A f_A = 0$ для каких-нибудь действительных коэффициентов α_A, то $\sum_{A \in Y} \alpha_A f_A(B) = 0$ для любого $B \in Y$ и, следовательно, $\alpha_B = 0$. Более того, никакая линейная комбинация многочленов f_A, $A \in Y$, не равна 1.

В самом деле, если $\sum_{A \in Y} \alpha_A f_A = 1$ для каких-нибудь действительных коэффициентов α_A, то $\sum_{A \in Y} \alpha_A f_A(B) = 1$ для любого $B \in Y$ и, следовательно, $\alpha_B = \frac{1}{|B| - \lambda}$. Таким образом,

$$\sum_{A \in Y} \frac{f_A}{|A| - \lambda} = 1,$$

что невозможно, так как свободный член каждого многочлена f_A отрицателен, и потому свободный член левой части последнего равенства должен быть отрицательным.

Итак, многочлены f_A и постоянный многочлен 1 линейно независимы. Поэтому

$$n + 1 \le m + 1 \Leftrightarrow n \le m.$$

Что происходит, если $m = n$?

Если все множества $A \in Y$ состоят из одного и того же числа элементов, то соответствующая структура называется *симметрическим* (m, k, λ)-*дизайном*.

Проективная плоскость порядка n *– это симметрический* $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$-*дизайн*.

Пример. Занумеруем вершины графа, изображенного на рисунке 72,*в*, числами 1, 2, 3, …, 16. Если i – любое из этих чисел, то пусть A_i – множество, состоящее из вершины i и пяти ее соседей. Тогда $|A_i \cap A_j| = 2$ для двух любых различных i и j, так что получается симметричный (16, 6, 2)-дизайн.

Если же не все множества $A \in Y$ состоят из одного и того же числа элементов, то, согласно *гипотезе Райзера–Вуделла*, все множества $A \in Y$, кроме одного, состоят из одного и того же числа элементов. К 2011 году эта гипотеза доказана для $m = p + 1$; $m = 2p + 1$; $m = 3p + 1$; $m = 4p + 1$; $m = 6p + 1$, где p – простое число, а также для $\lambda < 60$ при любом m.

О современном состоянии теории симметричных дизайнов и гипотезы Райзера–Вуделла можно узнать из упоминавшейся в решении предыдущей задачи 5-20 монографии [133].

Задачи для самостоятельного решения

5-22. а) Можно ли составить квадратную таблицу 100×100 из чисел так, чтобы сумма чисел, стоящих в каждом столбце, была положительна, а сумма чисел, стоящих в каждой строке, была отрицательна?

б) Можно ли в квадратной таблице размером 5×5 клеток расставить 25 чисел так, чтобы сумма четырех чисел в каждом квадрате 2×2 была отрицательной, а сумма всех 25 чисел – положительной?

5-23. Несколько человек в течение 7 часов наблюдали за улиткой. Каждый наблюдал за ней ровно 1 час и заметил, что за этот час улитка проползла ровно 1 м (хотя ползла она неравномерно, с остановками). Могла ли улитка за эти 7 часов проползти:

а) больше 7 м; б) больше 12 м; в) меньше 5 м; г) меньше 4 м?

5-24. а) Можно ли число 123 представить в виде произведения нескольких натуральных чисел так, чтобы сумма квадратов этих чисел тоже равнялась 123?

б) Тот же вопрос относительно числа 456.

5-25. Можно ли разместить на прямой:

а) 6; б) 7

отрезков так, чтобы каждую точку их объединения содержали не более трех отрезков и из любых трех отрезков два пересекались?

5-26. В автобус, едущий без кондуктора, вошли 15 незнакомых друг с другом людей. У каждого из них есть только серебряные монеты достоинством в 10, 15 и 20 копеек. Билет стоит 5 копеек.

а) Могло ли так быть, что все пассажиры правильно заплатили за проезд, взяв сдачу друг у друга?

б) Докажите, что если у пассажиров меньше 19 серебряных монет, то они не смогут правильно расплатиться за проезд.

в) Докажите, что если у всех пассажиров меньше чем 2 рубля 50 копеек, то они не смогут расплатиться.

5-27. а) В магазин привезли платья двух цветов и двух фасонов. Докажите, что для витрины можно выбрать два платья, отличающиеся друг от друга и цветом, и фасоном.

б) В магазин привезли платья трех цветов и трех фасонов. Можно ли выбрать для витрины три платья так, чтобы были представлены все три цвета и три фасона?

5-28. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть:

а) меньше 0,01; б) больше 100?

5-29. Верны ли следующие утверждения:

а) если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$

$$AB = A_1B_1, \; BC = B_1C_1 \text{ и } \angle A = \angle A_1,$$

то треугольники равны;

б) если три угла и две стороны одного треугольника равны трем углам и двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны;

в) если основания и боковые стороны одной трапеции соответственно равны основаниям и боковым сторонам другой трапеции, то такие трапеции равны?

5-30. Может ли так быть:

а) длины всех трех биссектрис треугольника меньше 1 см, а его площадь больше 1 см^2;

б) длины всех трех биссектрис треугольника больше 100 см, а его площадь меньше 1 см^2?

5-31. Какое число сторон может иметь плоский многоугольник, являющийся:

а) пересечением; б) объединением

треугольника и выпуклого четырехугольника?

5-32. Можно ли сложить квадрат из четырех плиток размером 1×1 восьми плиток размером 2×2, двенадцати плиток размером 3×3 и шестнадцати плиток размером 4×4?

5-33. а) Можно ли какой-нибудь разносторонний треугольник разрезать на два равных?

б) Можно ли разрезать квадрат на несколько тупоугольных треугольников?

в) Как разрезать треугольник с углами $15°$, $105°$ и $60°$ на равнобедренные треугольники?

г) Всякий ли треугольник можно разрезать на несколько равнобедренных треугольников?

5-34. Может ли какой-нибудь треугольник поместиться внутри круга, радиус которого меньше радиуса описанного вокруг этого треугольника круга?

5-35. Четырехугольник периметра P_1 расположен на плоскости внутри четырехугольника периметра P_2. Может ли быть:

а) $P_1 > P_2$; б) $P_1 > 2P_2$?

5-36. Можно ли начертить на плоскости замкнутую ломаную, пересекающую каждое свое звено:

а) 3 раза; б) n раз,

если точки пересечения звеньев ломаной не должны совпадать с ее вершинами и ни через одну точку пересечения не должно проходить более двух звеньев?

5-37. Можно ли расположить на плоскости:

а) 12; б) 13

точек и соединить их непересекающимися отрезками так, чтобы каждая точка была соединена с пятью другими?

5-38. Подберите четыре тройки целых неотрицательных чисел так, чтобы каждое целое число от 1 до 81 можно было представить в виде суммы четырех чисел – по одному из каждой тройки.

5-39. Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, у которой первые 100 членов – целые числа, а все остальные члены не являются целыми числами?

5-40. Могут ли числа 7, 8, 9 быть членами (не обязательно соседними) одной геометрической прогрессии?

5-41. а) Требуется подключить к сети люстру с семью лампочками так, чтобы можно было зажигать любое количество лампочек от одной до семи. Можно ли это сделать, если разрешается использовать только три выключателя?

б) Тот же вопрос о люстре с восемью лампочками.

5-42. Руководитель математического кружка задал на дом 20 задач. На следующем занятии выяснилось, что каждый участник кружка решил ровно две задачи, а каждую задачу решили ровно два участника.

а) Сколько было участников кружка?

б) Может ли руководитель кружка организовать разбор всех задач таким образом, что каждый участник расскажет по одной решенной им задаче?

в) Докажите, что существует не менее двух способов организовать разбор задач таким образом, и приведите пример ситуации, когда этих способов ровно два.

г) Каким может быть число способов такой организации разбора задач?

5-43. Среди 25 офицеров поровну пехотинцев, артиллеристов, танкистов, связистов и летчиков и, кроме того, поровну генералов, полковников, майоров, капитанов и лейтенантов, причем каждый из указанных пяти родов войск представлен офицерами всех пяти рангов. Постройте этих офицеров в каре 5×5 так, чтобы в любой колонне и в любой шеренге встречались офицеры всех родов войск и всех рангов.

5-44. Одна треугольная пирамида расположена внутри другой треугольной пирамиды.

а) Может ли сумма длин всех ребер внутренней пирамиды быть больше суммы длин ребер внешней?

б) Может ли полная поверхность внутренней пирамиды быть больше полной поверхности внешней?

5-45. Можно ли завернуть кубик с ребром 1 см в квадратный кусок бумаги со стороной 3 см?

5-46. Существует ли неправильный тетраэдр, у которого пять двугранных углов равны α? Если да, то каков его шестой двугранный угол?

5-47. Можно ли на планете, имеющей форму шара диаметра 1, расположить 8 станций слежения так, чтобы любое тело, находящееся на высоте 1 над поверхностью планеты, было видно по меньшей мере с двух станций?

5-48. а) Придумайте пример выпуклого многогранника, у которого все грани – параллелограммы, но он – не параллелепипед.

б) Пусть число различных направлений ребер такого многогранника равно k. Сколько у него граней?

5-49. а) Дан многочлен от двух переменных

$$P(x,y) = x + \frac{(x+y+1)(x+y)}{2}.$$

Будем составлять таблицу его значений при целых неотрицательных x и y. Докажите, что каждое целое неотрицательное число встретится в этой таблице один раз.

б) Придумайте такой многочлен $Q(x, y, z)$ от трех переменных, чтобы среди его значений при целых неотрицательных x, y, z каждое целое неотрицательное число встретилось один раз.

5-50. Существует ли такой многочлен $P(x, y)$, множество значений которого – множество всех положительных чисел?

§ 6. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИТЕРАЦИИ

6-1. а) Найдите сотую цифру после запятой в десятичной записи числа $1/7$.

б) Найдите какое-нибудь шестизначное число, которое при умножении на числа 2, 3, 4, 5, 6 дает шестизначные числа, отличающиеся от него только порядком цифр.

6-2. Над цепью озер летела стая белых гусей. На каждом озере садилась половина гусей и еще полгуся, а остальные летели дальше. Все гуси сели на семи озерах. Сколько гусей было в стае?

6-3. Последовательность (a_n) задана первыми двумя членами $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ и условием $a_{k+2} = a_{k+1}/a_k$ (k = 1, 2, 3, ...). Найдите a_{1986}.

6-4. В каждом из двух сосудов находится по A литров воды. Из первого сосуда переливают половину имеющейся в нем воды во второй, затем из второго переливают треть имеющейся в нем воды в первый, затем из первого переливают четверть имеющейся в нем воды во второй и т.д. Сколько воды окажется в каждом ив сосудов после 100 переливаний?

6-5. Имеются два сосуда. В них разлили 1 л воды. Из первого сосуда переливают половину воды во второй, затем из второго переливают половину оказавшейся в нем воды в первый, затем из первого переливают половину оказавшейся в нем воды во второй и т.д. Докажите, что независимо от того, сколько воды было сначала в каждом из сосудов, после 100 переливаний в них будет $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$ л с точностью до 1 миллилитра.

6-6. Строится числовая последовательность: первый ее член равен 3^{1986}, а каждый следующий член, начиная со второго, равен сумме цифр предыдущего. Найдите десятый член этой последовательности.

6-7. Вокруг поляны стоят 12 домиков, покрашенных в белый и красный цвета, в которых поселились 12 гномов. У каждого гнома нечетное число друзей. В январе первый гном красит свой дом в тот цвет, в который окрашены дома большинства его друзей. В феврале это же делает второй (по часовой стрелке) гном, в марте – третий и т. д. Докажите, что наступит момент, после которого цвет дома у каждого гнома перестанет меняться.

6-8. Представим себе, что на бесконечном листе клетчатой бумаги несколько (конечное число) клеток «заболели». Через каждый час одновременно происходят следующие изменения; если клетка больна, а две клетки, слева и снизу от нее, здоровы, то она выздоравливает; если клетка здорова, а две клетки, снизу и слева от нее, больны, то она заболевает (остальные клетки остаются такими, как были). Докажите, что, как бы ни были расположены вначале больные клетки, через некоторое время все клетки будут здоровы.

6-9. Перед шеренгой из N солдат стоит капрал и командует: «Нале-ВО!» По этой команде некоторые солдаты поворачиваются налево, остальные – направо. После этого через каждую секунду каждые два солдата, оказавшиеся лицом друг к другу, поворачиваются друг к другу затылками. Докажите, что через конечное время движение прекратится, и оцените, через сколько секунд это заведомо произойдет.

6-10. На столе у чиновника Министерства Околичностей [1] лежит n томов Британской энциклопедии, сложенных в несколько стопок. Каждый день, приходя на работу, чиновник берет по одному тому из каждой стопки, образует из них новую стопку, располагает стопки по количеству томов (в невозрастающем порядке) и заполняет ведомость, в которой указывает количество томов в каждой стопке. Например, если в первый день в ведомости записано (8, 3, 1, 1), то на следующий день запись будет (7, 4, 2), потом – (6, 3, 3, 1), (5, 4, 2, 2) и т.д. Что будет записано в ведомости через месяц, если общее количество томов n равно: а) 6; б) 10? (Начальное разбиение на стопки может быть произвольным.)

6-11. Сколько среди десятизначных чисел, состоящих из цифр 2 и 5, таких, у которых две двойки не стоят рядом?

6-12. Ребята стоят по кругу. Им нужно выбрать водящего, и они считаются следующим образом: первый остается в круге, следующий за ним по часовой стрелке – второй – выходит из круга, следующий за ним – третий – остается, четвертый выходит и т.д., через одного по кругу. Круг все время сужается до тех пор, пока в нем не останется только один человек. Определите, кто именно останется (на каком месте он стоял первоначально, считая от первого по часовой стрелке), если вначале стояло: а) 64 человека; б) 1986 человек.

---

[1] Ч.Диккенс, «Крошка Доррит».

6-13. Бесконечная последовательность нулей и единиц 0110100110010110... составлена по следующему правилу. Сначала написан нуль. Затем делается бесконечное количество шагов. На каждом шаге к уже написанному куску последовательности приписывается новый кусок той же длины, получаемый из него заменой всех нулей на единицы, а единиц – на нули, а) Какая цифра, 0 или 1, стоит на 1986-м месте? б) Будет ли эта последовательность, начиная с некоторого места, периодической?

6-14. На математическом вечере была проведена следующая игра. Зритель из зала написал на двух бумажках два последовательных натуральных числа (по одному на каждой бумажке) и скатал их в шарики. Ведущий дал вытянуть по одной бумажке двум математикам, А и Б; каждый из них посмотрел, какое число написано на его бумажке, но не сообщил его второму. Затем между А и Б состоялся следующий содержательный диалог.

А: Я не знаю, какое у тебя число.

Б: И я не знаю, какое у тебя число.

А: И я не знаю, какое у тебя число.

Б: И я не знаю, какое у тебя число.

. . . .

Десять раз А говорил, что не знает, какое число у Б, и десять раз Б отвечал, что он не знает, какое число у А. Зрителям это порядком надоело, но вдруг на одиннадцатый раз А заявил: «Теперь я знаю, какое у тебя число». Тогда в диалог вмешался ведущий и спросил зрителей, какие числа могли быть у А и В. Что они должны ему ответить?

6-15. На прямоугольную карту положили карту той же местности, но меньшего масштаба (рис.77). Докажите, что можно проткнуть иголкой сразу обе карты так, чтобы точка прокола изображала на обеих картах одну и ту же точку местности.

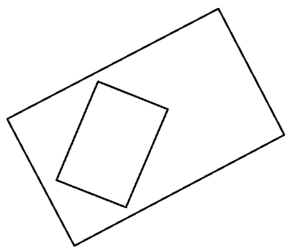

Рис. 77

6-16. Докажите, что последовательность

$$\sqrt{1},\ \sqrt{1+\sqrt{1}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\ \ldots,\ \sqrt{\underbrace{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}_{n\ \text{раз}}},\ldots$$

имеет предел, и найдите его.

6-17. Последовательность (a_n)

$$1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$$

задается так: $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n}$ для каждого n = 1, 2, 3, … Найдите число, которое меньше всех членов последовательности с четными номерами (a_2, a_4, a_6, …) и одновременно больше всех ее членов с нечетными номерами (a_1, a_3, a_5, …).

6-18. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2y = 4 - x^2, \\ 2x = 4 - y^2. \end{cases}$$

Обсуждение задач

Задача **6-1**. а) *Ответ*: 8.

Начнем делить 1 на 7 «уголком» и увидим, что последовательность цифр частного после запятой будет периодической с периодом из 6 цифр: (142857). Так как $100 = 6 \cdot 16 + 4$, на 100-м месте после запятой будет стоять четвертая цифра периода – цифра 8.

∇ *Для любых натуральных чисел p и q дробь $\dfrac{p}{q}$ представляется либо конечной десятичной дробью, либо бесконечной периодической десятичной дробью.* В самом деле, деля p на q «уголком», мы будем получать остатки при делении некоторых натуральных чисел на q. Остатком при делении на q может быть целое неотрицательное число, меньшее q. Поэтому после не более чем q делений либо какой-то очередной остаток окажется нулем и мы получим конечную десятичную дробь, либо какие-то два остатка совпадут и с этого места частные будут периодически повторяться. В этом рассуждении использован принцип Дирихле, о котором говорилось в обсуждении задачи 2-9.

б) *Ответ*: 142857.

Действительно, умножая это число на 2, 3, 4, 5 и 6, получим числа 285714, 428571, 571428, 714285 и 857142 соответственно.

∇ Ответ в задаче б) – это число, составленное из цифр периода разложения числа $1/7$ в десятичную дробь. Выписанные пять чисел являются, в свою очередь, периодами разложения чисел $2/7$, $3/7$, $4/7$, $5/7$, $6/7$ в десятичную дробь. В этом легко убедиться при делении числа 1 на 7 уголком: со второго шага мы делим 3 на 7, начиная с третьего шага – 2 на 7, затем – 6, 4 и 5.

Задача **6-2**. *Ответ*: 127 гусей.

Пусть вместе со стаей белых гусей все время летит еще один, Серый гусь. Если к некоторому озеру, подлетает m белых гусей и Серый, то на этом озере садится $\dfrac{m}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{m+1}{2}$ – ровно половина всех гусей. Поэтому после каждого озера число летящих гусей уменьшается ровно вдвое. После семи озер оно уменьшается в $2^7 = 128$ раз, а остается летящим один Серый гусь. Значит, вначале было 128 гусей, из них 127 − белых.

∇ Серый гусь возник в решении задачи не случайно. Обозначим через x_k количество летящих белых гусей, когда впереди остается еще k озер. Тогда условие задачи записывается так: $x_k - x_{k-1} = \frac{x_k}{2} + \frac{1}{2}$. Отсюда получаем для последовательности (x_k) рекуррентное соотношение

$$x_k = 2x_{k-1} + 1. \qquad (*)$$

Добавив Серого гуся, мы, по существу, сделали *замену переменной*: $y_n = x_n + 1$ и получили новую последовательность (y_n). Подставив в соотношение $(*)$ $x_k = y_k - 1$ и $x_{k-1} = y_{k-1} - 1$, мы видим, что последовательность (y_n) удовлетворяет более простому соотношению: $y_k = 2y_{k-1}$; (y_k) − это геометрическая прогрессия со знаменателем 2, и, следовательно, ее общий член имеет вид $y_n = 2^n y_0$. Возвращаясь к последовательности (x_n), находим формулу ее общего члена $x_n = 2^n - 1$.

Рассмотрим теперь более общий случай последовательности (x_n), заданной соотношением

$$x_k = qx_{k-1} + d. \qquad (**)$$

Если $q = 1$, то (x_n) − *арифметическая прогрессия* и ее общий член задается формулой $x_n = x_0 + d(n-1)$.

Если $q \neq 1$ и $d = 0$, то (x_n) − *геометрическая прогрессия* и $x_n = q^n x_0$. Если же $q \neq 1$ и $d \neq 0$, то ищем такое z, чтобы последовательность $y_n = x_n + z$ стала геометрической прогрессией. Подставляя $x_k = y_k - z$ и $x_{k-1} = y_{k-1} - z$ в соотношение $(**)$, получаем: $y_k = qy_{k-1} + z(1-q) + d$. Если z выбрать так, что $z(1-q) + d = 0$, то $y_k = qy_{k-1}$, откуда $y_n = q^n y_0$. Тем самым найдена формула общего члена: $x_n = q^n(x_0 + z) - z$, где $z = \frac{d}{q-1}$. В нашей задаче $q = 2$, $x_0 = 0$, $d = 1$ и $z = 1$ (один Серый гусь).

Задача **6-3**. *Ответ*: $a_{1986} = 2/3$.

Выпишем первые члены этой последовательности:

$$2,\ 3,\ 3/2,\ 1/2,\ 1/3,\ 2/3,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Так как два соседних члена a_7 и a_8 такие же, как a_1 и a_2, а каждый следующий член вычисляется по двум предыдущим, то последовательность будет повторяться с периодом 6. Так как 1986 делится на 6, то $a_{1986} = a_6 = 2/3$.

∇ Вообще, при любых ненулевых первых двух членах a_1 и a_2, последовательность из задачи 6-2 повторяется с периодом 6, т.е. $a_{n+6} = a_n$. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно выписать первые восемь членов последовательности:

$$a_1, a_2, a_2/a_1, 1/a_1, 1/a_2, a_1/a_2, a_1, a_2, \ldots$$

Удобно обозначить $\ln|a_n|$ через x_n, тогда последовательность (x_n) будет подчиняться условию: $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$ (при $n \geq 1$) и, конечно, тоже будет периодической с периодом 6. Верен более общий факт: если $d = 2\cos\frac{k\pi}{m}$, где k и m ($k < m$) – взаимно простые натуральные числа, то последовательность, для которой $x_{n+2} = dx_{n+1} - x_n$, периодическая с периодом $2m$. При $k = 1$, $m = 3$ получаем $d = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$ и период последовательности равен $2m = 6$.

Задача **6-4**. *Ответ*: столько же, сколько было вначале – по A л воды в каждом.

Чтобы убедиться в этом, покажем, что после каждых двух следующих переливаний количество воды остается прежним. Когда в сосуд добавляют $1/k$-ю часть воды из другого, в нем становится

$$A\left(1 + \frac{1}{k}\right) = A\frac{k+1}{k} \text{ л}.$$

После этого, когда от него отливают $\frac{1}{k+1}$-ю часть, в нем становится

$$A\frac{k+1}{k}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = A\frac{k+1}{k} \cdot \frac{k}{k+1} = A \text{ л}.$$

Задача **6-5**. Заметим, что если бы в первом сосуде было $\frac{2}{3}$ л, а во втором – $\frac{1}{3}$ л, то после первого переливания объемы поменялись бы местами, а после второго переливания стали бы такими же, как вначале.

Будем вести отсчет именно от такого состояния. Пусть после четного числа переливаний в первом сосуде оказалось $\left(\frac{2}{3} + p\right)$ л, где $-\frac{2}{3} \leq p \leq \frac{1}{3}$, тогда во втором будет $\left(\frac{1}{3} - p\right)$ л воды. После следующего переливания в этих сосудах будет соответственно $\left(\frac{1}{3} + \frac{p}{2}\right)$ л и $\left(\frac{2}{3} - \frac{p}{2}\right)$ л воды, а затем $\left(\frac{2}{3} + \frac{p}{4}\right)$ л и $\left(\frac{1}{3} - \frac{p}{4}\right)$ л.

Итак, после каждых двух переливаний добавка p уменьшается в 4 раза. Значит, после 100 переливаний (50 пар переливаний) добавка p уменьшится в 4^{50} раз и в сосудах будет: $\frac{2}{3}+p\cdot\frac{1}{4^{50}}$ и $\frac{1}{3}-p\cdot\frac{1}{4^{50}}$. Поскольку добавка p удовлетворяет неравенству $-\frac{2}{3}\le p\le\frac{1}{3}$, добавка $p\cdot\frac{1}{4^{50}}$ меньше чем $\frac{1}{10000}$ и тем самым в сосудах с большой точностью будет $\frac{2}{3}$ л и $\frac{1}{3}$ л.

∇ Если каждый раз переливать не половину, а $\frac{1}{n}$-ю часть имеющейся воды, то после 100 переливаний с большой точностью в сосудах окажется соответственно $\frac{n}{2n-1}$ и $\frac{n-1}{2n-1}$ л воды.

Покажем, как найти этот ответ. Если в первом сосуде x л воды, а во втором y л воды, то после первого переливания в первом будет $x\left(\frac{n-1}{n}\right)$ л. Для того чтобы после второго переливания в нем оказалось снова x л, должно выполняться соотношение $y=x\left(\frac{n-1}{n}\right)$. Поскольку $x+y=1$, получаем $x=\frac{n}{2n-1}$ л, $y=\frac{n-1}{2n-1}$ л.

Задача **6-6**. *Ответ*: 9.

Если число делится на 9, то и сумма его цифр делится на 9, а так как $3^{1986}=9\cdot 3^{1984}$, то все члены данной последовательности делятся на 9.

Оценим их величины. Из неравенства $3^2<10$ следует, что $3^{1986}<10^{993}$, поэтому в числе 3^{1986} не больше 993 цифр. Значит, второй член последовательности не больше чем $9\cdot 993<10^4$, т.е. в нем не больше четырех цифр. Тогда третий член последовательности не больше чем $9\cdot 4=36$, а четвертый – меньше чем 18. Поскольку четвертый член, как и предыдущие, делится на 9, он равен 9. А значит, и все следующие равны 9.

∇ Вообще, в последовательности натуральных чисел, у которой n-й член – сумма цифр $(n-1)$-го члена, все члены, начиная с некоторого, одинаковы и равны остатку r от деления первого члена на 9 (если $r\ne 0$) или 9 (если $r=0$).

Задача **6-7**. Рассмотрим число пар гномов-друзей, у которых дома разного цвета. Каждый месяц их количество не увеличивается. Действительно, если очередной гном красит дом в тот же цвет, который был раньше, то это число сохраняется; если же он покрасил дом в другой цвет, то оно уменьшится. Поскольку это целое число неотрицательно, оно не может все время уменьшаться, значит, начиная с некоторого момента оно не будет изменяться. С этого момента каждый гном всегда будет красить свой дом в один и тот же цвет.

∇ Заметим, что в условии задачи нечетность числа друзей у каждого гнома нужна лишь для того, чтобы было ясно, что такое большинство, а число гномов можно заменить на любое другое четное число. В решении этой задачи нам помог следующий прием: *найти такую величину* (количество пар друзей с разноцветными домами), *которая при указанной в условии операции сохраняется или убывает.* Этот прием часто помогает разобраться, что происходит при многократном повторении той или иной операции на некотором множестве.

Задача **6-8**. Проведем через верхнюю сторону самой верхней больной клетки горизонтальную прямую. Ясно, что ни одна клетка, расположенная выше этой прямой, не заболеет. Аналогично не заболеет ни одна клетка, находящаяся правее самой правой из первоначально больных клеток. Таким образом, все клетки, которые, может быть, заболеют, лежат внутри некоторого прямого угла. Рассмотрим наиболее удаленную от вершины угла диагональ, перпендикулярную биссектрисе этого угла, на которой еще лежат больные клетки. Ясно, что все больные клетки, лежащие на ней, через час выздоровеют. Таким образом, каждый час наиболее удаленная от вершины диагональ, содержащая больные клетки, «шагает» к вершине угла. Следовательно, в некоторый момент она достигнет вершины угла, внутри которого могут лежать больные клетки. Это и означает, что все клетки выздоровели.

Для знатоков. Пусть каждая клетка на плоскости может находиться в двух состояниях, 0 и 1 (или в одном из конечного числа N состояний), и в каждый момент времени $t = 1, 2, 3, \ldots$ принимает одно из этих состояний, в зависимости от состояний нескольких своих соседей, по определенному правилу F, одинаковому для всех соседей. Такие системы, получившие название *клеточных автоматов*, стали интенсивно изучаться в последнее десятилетие физиками, конструкторами вычислительных машин и математиками. Для некоторых сравнительно простых правил (таких, как, например, правила *игры «Жизнь» Дж. Конвея* – см. [74]) клеточный автомат обладает замечательно сложным поведением. Это относится не только к двумерным, но и одномерным (расположенным на целочисленной прямой) клеточным автоматам. Они широко исследуются с помощью моделирования на ЭВМ; построены даже специальные программы, позволяющие наблюдать поведение клеточного автомата на экране дисплея.

Математических результатов, относящихся к клеточным автоматам, пока получено немного. Для некоторых задач, относящихся к ним, доказана их алгоритмическая неразрешимость; например для игры «Жизнь» не существует алгоритма, позволяющего по начальной конфигурации из конечного числа единиц узнать, превратится ли она за некоторое время в пустую конфигурацию «все нули».

Задача **6-9**. Поставим в соответствие шеренге солдат ломаную на клетчатой бумаге, линии которой идут под углом 45° к горизонтальной прямой, как показано на рисунка 78,*а*: каждому солдату соответствует очередной отрезок ломаной, причем если

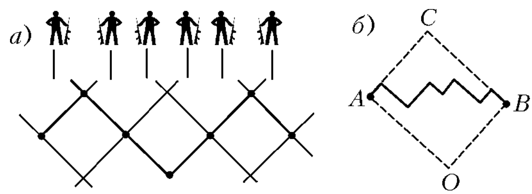

Рис. 78

солдат смотрит направо, то соответствующий отрезок ломаной идет вверх, а если налево – то вниз. Изменения, происходящие в шеренге солдат за. очередную секунду, можно описать теперь так: концы A и B ломаной не сдвигаются, а каждый уголок из двух соседних отрезков, торчащий вверх («горка»), превращается в уголок, торчащий вниз («ямка»). Таким образом, высота самой высокой «горки» за каждую секунду снижается, и так будет до тех пор, пока в ломанной не останется ни одной «горки», т.е. она превратится в ломаную AOB из двух сторон прямоугольника $AOBC$ (см. рис.78,*б*).

Наибольшее число секунд, в течение которого может происходить движение в шеренге из N солдат, равно $N - 1$: именно таким оно будет, если начальное расположение соответствует ломаной ACB, а для любой другой ломаной с теми же концевыми вершинами время до полной остановки будет меньше.

∇ Если в бесконечной шеренге почти все солдаты повернуты налево и лишь некоторое конечное множество смотрят направо, то движение по указанному в задаче правилу будет продолжаться бесконечное время – вдоль шеренги двигается сохраняющая форму волна.

Интересно, что существуют одинаковые для всех солдат, симметричные по отношению к замене «левого» на «правое» и требующие лишь зависимости от трех соседей правила, которые позволяют исправить любой конечный дефект в бесконечной шеренге. Вот одно из них. Пусть каждый солдат, который видит, что первый и третий солдаты перед ним (о той стороны, куда он смотрит) стоят к нему лицом, поворачивается к ним спиной, тогда через конечный промежуток времени движение в любой шеренге с «конечным дефектом» прекратится (см. [53]).

Задача **6-10**. а) *Ответ*: (3, 2, 1).

На рисунке 79 нарисована схема. На ней изображены все возможные типы записи в ведомости при $n = 6$. Стрелка, ведущая из одной записи в другую, показывает, что вслед за первой из

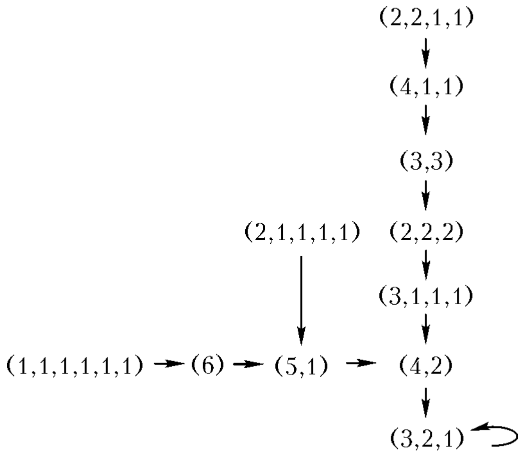

Рис. 79

этих записей обязательно будет вторая. Мы видим, что не позже чем с седьмого дня в ведомости каждый день будет запись (3, 2, 1).

б) *Ответ*: (4, 3, 2, 1).

Этот ответ можно получить, составив схему аналогично приведенной на рисунке 79. Желающие могут се нарисовать (она содержит 42 записи) и увидеть, что не позже чем с тринадцатого дня в ведомости каждый день будет запись (4, 3, 2, 1).

∇ В принципе, аналогичным образом можно нарисовать схему для любого заданного n, правда, при больших n это требует очень много времени. Однако оказывается, что, не делая полного перебора, можно выяснить, какие записи будут появляться в ведомости через достаточно большое время. Общий результат можно сформулировать так. Если число томов n можно записать в виде суммы последовательных нату-