третий. Могло ли так быть? (Очки подсчитывались так: выигрыш – 1 очко, ничья – $1/2$ очка, проигрыш – 0 очков.)

5-20. Можно ли дополнить табличку 4×4 (рис.53) буквами В, З, М и Ш[1], обвести их рамками четырех типов (квадрат, ромб, треугольник и круг) и раскрасить их в четыре цвета так, чтобы одновременно выполнялись все следующие условия:

а) в каждой строке и в каждом столбце должны встречаться все буквы, все цвета и все типы рамок;

б) каждая буква должна быть раскрашена по одному разу каждым цветом;

в) рамка каждого типа должна содержать по разу каждую букву и каждый цвет?

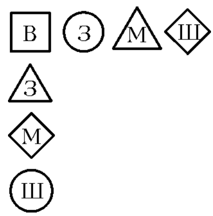


Рис. 53

5-21. После каждого занятия несколько членов математического кружка (не один и не все вместе) заходят в кафе-мороженое. При этом в кружке действует строгое правило: после каждого визита в кафе никакие двое из участников этого визита потом больше вместе мороженое не едят. На последнем занятии выяснилось, что теперь члены кружка могут есть мороженое только поодиночке.

а) Сколько могло быть занятий кружка, если в нем 4 члена? (Приведите все возможные ответы.)

б) Составьте расписание 7 посещений кафе-мороженого, если в кружке 7 членов.

Обсуждение задач

Задача **5-1.** а), б). *Ответ*: поезд мог ехать неравномерно, и его средняя скорость не обязательно равна 100 км/ч.

Покажем это. Разобьем все время движения поезда на 11 получасовых интервалов. Пусть каждый нечетный по счету получас поезд движется точно так же, как первый получас, и проходит за каждый такой получас k км ($0 \le k \le 100$), а каждый четный получас пусть он движется точно так же, как второй по счету получас, и проходит за каждый четный получас ($100 - k$) км. Тогда, как бы ни двигался поезд первые два получаса – равномерно или нет, – за каждый час движения поезд пройдет ровно 100 км.

Для ответа на вопрос б) найдем среднюю скорость движения поезда. Расстояние, пройденное поездом за все нечетные получасовые интервалы времени, равно $6k$, а расстояние, пройденное

[1] ВЗМШ – Всесоюзная заочная математическая школа.

им за все четные интервалы, равно $5(100-k)$. Таким образом, за все 5,5 часов движения поезд прошел $6k+5(00-k)=500+k$. Поэтому его средняя скорость равна $(500+k)/5,5$ (км / ч). При $k \neq 50$ эта скорость не равна 100 км / ч.

∇ В нашем примере движение поезда было периодическим с периодом $T = 1$ час. Можно показать, что такая периодичность скорости движения следует из условий задачи. Из наших рассуждений видно, что средняя скорость поезда может оказаться любым числом в интервале от 1000 / 11 (при $k = 0$) до 1200 / 11 (при $k = 100$) км / ч.

Задача **5-2.** *Ответ*: может.

Приведем пример:

$$2;\ 2;\ 2;\ 2;\ -9;\ 2;\ 2;\ 2;\ 2;\ -9;\ 2;\ 2.$$

Здесь выписаны подряд (с учетом знака) разности между доходами и расходами человека (сальдо) за каждый месяц года. Мы видим, что сумма любых пяти последовательных чисел выписанной цепочки отрицательна (равна -1), а в целом за год сумма всех чисел положительна (равна 2).

∇ Обобщение этой задачи: в строчку выписано n чисел, при этом сумма любых k соседних чисел отрицательна; может ли в такой ситуации сумма всех n чисел быть положительной? Ответ здесь такой: если n кратно k, то этого быть не может, а если n не делится на k, то может. В нашей задаче $n = 12$, $k = 5$.

Это утверждение можно, в свою очередь, тоже обобщить. Пусть в строчку выписано m чисел. Назовем сумму q идущих подряд чисел из этой строчки q-суммой. Тогда если для натуральных чисел m, n и k выполняется неравенство $m \le n+k-d-1$, где $d = \text{н.о.д.}(n,k)$ − наибольший общий делитель чисел n и k, то можно написать в строчку m чисел так, что все ее n-суммы будут иметь один знак, а все k-суммы − другой знак. Более того, все эти суммы могут принимать любые наперед заданные значения.

В самом деле, составим систему $k+n-2d$ линейных уравнений с $k+n-d-1$ неизвестными:

$$\begin{array}{ll}
x_1+\ldots+x_n & = a_1, \\
\quad x_2+\ldots+x_{n+1} & = a_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\quad x_{k-d}+\ldots+x_{k+n-d-1} & = a_{k-d}, \\
x_1+\ldots+x_k & = b_1, \\
\quad x_2+\ldots+x_{k+1} & = b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\quad x_{n-d}+x_{k+n-d-1} & = b_{n-d}.
\end{array}$$

Можно показать, что эта система совместна: ее матрица имеет максимально возможный ранг $k+n-2d$. Если числа n и k взаимно просты ($d=1$), то она имеет единственное решение; если же $d>1$, то в системе имеется $d-1$ свободных неизвестных.

Таким образом, по заданным n и k можно найти строчку из $n+k-d-1$ чисел, удовлетворяющих условию. Если $m \le n+k-d-1$, то строчка, образованная первыми m числами уже выписанной строчки, тоже удовлетворяет условию.

Покажем теперь, что если $m \ge n+k-d$, то не существует такой строчки из m чисел, что все ее n-суммы имеют один знак, а все k-суммы – другой.

Допустим, напротив, что нашлась такая строчка из $n+k-d$ чисел, и пусть $n>k$. Вычеркнем первые k чисел. Тогда в строчке из оставшихся $n-d$ чисел все k-суммы по-прежнему имеют один знак, а все $(n-k)$-суммы имеют другой знак. Поскольку

$$n-d=(n-k)+k-d\ ,$$

мы от задачи с параметрами n и k пришли к задаче с меньшими числами: k и $n-k$. Повторяя эту процедуру (похожую на алгоритм Евклида), мы придем к такой ситуации: имеется строчка чисел, в которой все d-суммы имеют один знак, а все ld-суммы – другой знак, что, очевидно, невозможно. (Заметим, что аналогичной процедурой – спуском от (n,k) к $(k,n-k)$, похожей на алгоритм Евклида, можно доказать и совместность выписанной выше системы.)

Наконец, ясно, что если не существует строчки из $n+k-d$ чисел, удовлетворяющей условию, то нельзя выписать и более длинную такую строчку.

Задача 5-3. *Ответ*: можно.

Действительно:

$$203=7+29+\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{167\ \text{единиц}}=7\cdot 29\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{167\ \text{единиц}}\ .$$

∇ Поставим вопрос: какие натуральные числа нельзя представить одновременно в виде суммы и в виде произведения нескольких (одних и тех же) натуральных чисел?

Ответ на этот вопрос такой: простые числа.

Интересен и такой вопрос, связанный с задачей 5-3: при каких натуральных значениях k уравнение

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_k$$

имеет ненулевое решение в целых числах?

Оказывается, что при всех значениях k. Например:

при $k = 1$ $\quad x_1 = 1$;

при $k = 2$ $\quad x_1 = x_2 = 2$;

при $k > 2$ $\quad x_1 = x_2 = \ldots = x_{k-2} = 1$,

$\qquad x_{k-1} = 2, \quad x_k = k$

(см. [109], задачи 186–189).

Задача **5-4.** *Ответ*: неверно.

Контрпример: 6, 10, 15, 77, 91, 143.

Из этих шести чисел, $2\cdot3$, $2\cdot5$, $3\cdot5$, $7\cdot11$, $7\cdot13$, $11\cdot13$, никакие три не имеют общего простого множителя, но два из каждых трех входят в первую или во вторую тройку и потому не взаимно просты.

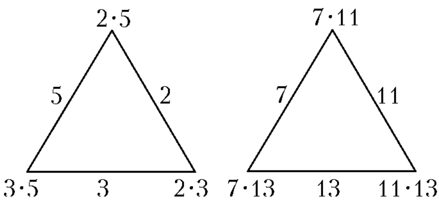


Рис. 54

Это хорошо видно на схеме – см. рисунок 54. В каждой вершине треугольника поставлено одно из чисел, а на каждой стороне – общий множитель чисел, стоящих в ее концах.

∇ Если к условию задачи добавить еще одно слово, утверждение станет верным: из любых шести натуральных чисел можно выбрать либо три попарно взаимно простых числа, либо три числа, *попарно* имеющих общий делитель, больший единицы.

Знатокам эта задача, безусловно, напомнит такую: среди шести людей всегда можно выбрать трех попарно знакомых или трех попарно незнакомых.

Задача **5-5.** а) *Ответ*: верно.

Пусть a и b – наибольшее и наименьшее из выписанных чисел. Если между ними есть какое-то число, то утверждение верно. Если они стоят рядом, то либо справа, либо слева от них есть еще два числа. Они и образуют нужную тройку чисел либо с числом a, либо с числом b.

Для знатоков. По этому поводу имеется общая теорема: в частично упорядоченном множестве, состоящем из $mn + 1$ элементов, всегда найдется либо цепочка длины $m + 1$, либо $n + 1$ попарно несравнимых элементов (эта теорема – следствие известной **теоремы Дилворта**: *в частично упорядоченном множестве минимальное число цепочек, содержащих все элементы множества, равно максимальному числу попарно несравнимых элементов*).

При рассмотрении пяти чисел их можно упорядочить так. Будем считать, что для чисел a и b выполняется отношение $a \prec b$, если a меньше b и число a стоит в выписанном ряду левее числа b. Числа c и d оказываются в этом смысле несравнимыми тогда и только тогда, когда они стоят в выписанном ряду в порядке убывания.

Поскольку $5 = 2 \cdot 2 + 1$ ($m = n = 2$), из сформулированной теоремы следует, что из пяти чисел всегда найдутся три, идущие либо в порядке возрастания (цепочка длины $m + 1 = 3$), либо в порядке убывания ($n + 1 = 3$ попарно несравнимых элемента). Если в сформулированной выше теореме положить $m = n$, то получится такое следствие: из конечной последовательности, состоящей из $n^2 + 1$ чисел, можно выбрать монотонную подпоследовательность, состоящую из $n + 1$ чисел. Интересно, что верно утверждение, которое получается из предыдущего «предельным переходом» при $n \to \infty$: из любой бесконечной последовательности можно выбрать бесконечную монотонную подпоследовательность. Доказать это даже легче, чем для конечного n.

б) *Ответ*: неверно.

Приведем контрпример – девять чисел: 3, 2, 1, 6, 5, 4, 9, 8, 7.

Докажем, что никакие четырех цифры в этой последовательности не идут ни в порядке возрастания, ни в порядке убывания. Для этого разобьем члены последовательности на три тройки: 321, 654, 987.

Если какие-то две цифры из данных девяти стоят в убывающем порядке (та, которая меньше, стоит дальше от начала последовательности), то они обязательно из одной тройки. Значит, нельзя выбрать больше трех цифр, стоящих в убывающем порядке, поскольку все эти цифры должны находиться в одной тройке.

Если же какие-то две цифры из этих девяти стоят в возрастающем порядке, то они обязательно из разных троек. Так как троек всего три, то нельзя выбрать более трех цифр, стоящих в возрастающем порядке.

Задача **5-6**. а) *Ответ*: может.

Пример – два числа, 2 и -1: $2 + (-1) = 1$; $2^3 + (-1)^3 = 7 > 1$.

б) *Ответ*: может.

Пример – восемь чисел: два числа, каждое из которых равно 0,8, и шесть чисел, каждое из которых равно $-0{,}1$:

$$2 \cdot 0{,}8 + 6 \cdot (-0{,}1) = 1;\ (0{,}8)^3 + 6 \cdot (-0{,}1)^3 = 1{,}018 > 1.$$

Для знатоков. Эта идея – добавлять к положительным числам много отрицательных, но величиной поменьше – помогает ответить на такой вопрос: может ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходиться, а ряд из кубов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ – расходиться? Ответ на этот вопрос положителен. Приведем пример:

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)+\ldots \qquad (*)$$

Ряд $(*)$ составляется так: следом за суммой $\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$ поставим $2^3=8$ сумм $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)$, затем $3^3=27$ сумм $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)$, …, затем n^3 сумм $\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}\right)$ и т.д.

Указанный ряд сходится, так как сумма N его первых членов, где

$$3\left(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3\right)<N\le 3\left(1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3\right)$$

не превышает числа $\frac{1}{2(n+1)}$ (она либо равна нулю, либо равна $\frac{1}{n+1}$, либо равна $\frac{1}{2(n+1)}$).

Ряд из кубов членов ряда $(*)$ расходится, так как сумма n^3 сумм $\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(-\frac{1}{2n}\right)+\left(-\frac{1}{2n}\right)^3$ равна $3/4$, поэтому сумма первых $3\left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right)$ членов равна $\frac{3n}{4}$ и, значит, неограниченно растет.

Можно доказать, что только для функций, имеющих вид $f(x)=kx$ в некоторой окрестности нуля, из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$.

Задача **5-7**. а) *Ответ*: верно.

Рассмотрим функцию $y=F(x)=f\left(x+\frac{1}{5}\right)-f(x)$, определенную и непрерывную на отрезке $[0;\,4/5]$. Нам нужно доказать, что на этом отрезке найдется такая точка x_0, что $F(x_0)=0$. По определению функции $y=F(x)$, имеем:

$$F(0)=f\left(\frac{1}{5}\right)-f(0), \qquad (1)$$

$$F\left(\frac{1}{5}\right)=f\left(\frac{2}{5}\right)-f\left(\frac{1}{5}\right), \qquad (2)$$

$$F\left(\frac{2}{5}\right)=f\left(\frac{3}{5}\right)-f\left(\frac{2}{5}\right), \tag{3}$$

$$F\left(\frac{3}{5}\right)=f\left(\frac{4}{5}\right)-f\left(\frac{3}{5}\right), \tag{4}$$

$$F\left(\frac{4}{5}\right)=f(1)-f\left(\frac{4}{5}\right). \tag{5}$$

Поскольку $f(0)=f(1)$, почленно сложив равенства (1)–(5), мы получим

$$F(0)+F\left(\frac{1}{5}\right)+F\left(\frac{2}{5}\right)+F\left(\frac{3}{5}\right)+F\left(\frac{4}{5}\right)=0\,. \tag{$*$}$$

Равенство ($*$) возможно только в двух случаях: либо все пять слагаемых в его левой части равны нулю – тогда задача решена, либо среди этих слагаемых есть числа разных знаков. Пусть $F(x_1)$ и $F(x_2)$ – числа разных знаков, где $0 \le x_1 < x_2 \le \frac{4}{5}$. Тогда, в силу непрерывности функции $F(x)$, найдется такое число x_0 $(x_1 < x_0 < x_2)$, что $F(x_0)=0$, что и требовалось.

б) *Ответ*: неверно, график может не иметь такой хорды.

На рисунке 55 приведен нужный пример. Поясним, как он построен.

Пусть точки A и B – концы отрезка [0; 1], точка C– его середина, а точки D и E делят его на три равные части.

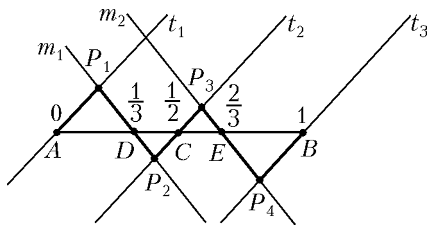


Рис. 55

Проведем через точки A, C и B параллельные наклонные l_1, l_2 и l_3, а через точки D и E – пересекающие их прямые m_1 и m_2 так, что $m_1 \parallel m_2$. Обозначив через P_1, P_2, P_3 и P_4 ближайшие к оси абсцисс точки пересечения прямых l_1, l_2 и l_3 с прямыми m_1 и m_2, получим ломаную $AP_1DP_2CP_3EP_4B$. Покажем, что эта ломаная служит искомым примером.

Во-первых, она является графиком непрерывной на отрезке [0; 1] функции $f(x)$, причем $f(0)=f(1)=0$.

Во-вторых, она не имеет хорды длины $2/5$, параллельной оси абсцисс. Действительно, если концы хорды, параллельной оси Ox, лежат на соседних звеньях ломаной, то она не превосходит, очевидно, отрезка DE, равного $1/3$. Если же концы хорды лежат на звеньях «через одно» или «через два», то она не меньше отрезка AC, равного $1/2$. Поскольку $\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$, наше утверждение доказано.

∇ Аналогично решению задачи 5-7 а) можно доказать, что для графика данной в ее условии функции $y = f(x)$ существует хорда длины $\frac{1}{n}$, параллельная оси абсцисс (n – любое натуральное число) – см. [62].

Для знатоков. Последнее утверждение – частный случай **теоремы Леви**: *если у плоского континуума есть хорда длины a, то у него есть и параллельная ей хорда длины* $\frac{1}{n} \cdot a$ (где n – произвольное натуральное число).

С другой стороны, для всякого числа α ($0 < \alpha < 1$), которое не представляется в виде $\frac{1}{n}$ (где n – натуральное число), можно аналогично решению задачи 5-7 б) построить пример плоского континуума, имеющего хорду длины 1 и не имеющего параллельной ей хорды длины α – см. [99].

Отметим еще, что для периодической непрерывной функции на прямой дело обстоит совершенно иначе: у ее графика найдется горизонтальная хорда любой заданной длины.

Задача **5-8**. *Ответ*: может.

Приведем пример. В качестве первого возьмем правильный треугольник с длиной стороны $1/2$ см, а в качестве второго – равнобедренный треугольник с основанием 200 м и высотой 10^{-7} м. Его боковая сторона больше половины основания, т.е. тоже больше 100 м, а площадь равна 10^{-5} м^2 и меньше площади первого треугольника, равной $\sqrt{3}/16$ см^2.

Задача **5-9**. а) *Ответ*: может.

Приведем пример. Рассмотрим равнобедренный треугольник с основанием 800 см и высотой 0,3 см. Его площадь равна $\frac{800 \cdot 0,3}{2}$ и тем самым больше 100 см^2. Покажем, что этот треугольник удовлетворяет условию.

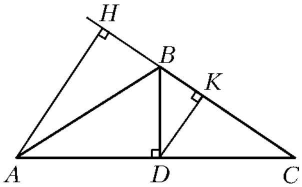


Рис. 56

Действительно, его высота AH, опущенная на боковую сторону BC (рис.56), равна удвоенной длине перпендикуляра DK, опущенного из середины основания D на боковую сторону BC, а этот перпендикуляр, в свою очередь, меньше наклонной

BD. Отсюда вытекает, что высота AH меньше чем 0,6 см и, значит, все высоты треугольника ABC меньше 1 см.

б) *Ответ*: не может.

Поскольку высоты треугольника больше 2 см, то и его стороны больше 2 см, а тогда его площадь больше чем $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2\ \left(\text{см}^2\right)$.

Задача **5-10**. *Ответ*: неверно.

Контрпример показан на рисунке 57. Мы взяли три вершины A, B и D четырехугольника $ABCD$ очень близко друг к другу, а четвертую вершину C и точку O внутри четырехугольника – близко друг к другу и далеко от A, B и D.

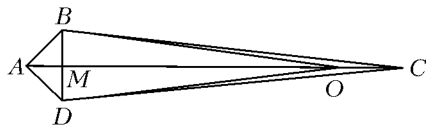


Рис. 57

Для знатоков. Поставим более общий вопрос. При каких k для любой точки, лежащей внутри четырехугольника, сумма расстояний от нее до вершин четырехугольника меньше kP (P – периметр четырехугольника)? *Ответ*: при $k \geq \frac{3}{2}$. Объясним, почему это так.

Для каждого четырехугольника $ABCD$ точкой, для которой сумма расстояний до вершин максимальна, является одна из его вершин.

В самом деле, функция (на плоскости) $M \to |AM|$, где A – фиксированная точка плоскости, выпукла (ее график – конус), а сумма четырех выпуклых функций

$$f(M) = |AM| + |BM| + |CM| + |DM|$$

тоже выпукла. Наибольшее значение выпуклой функции на многоугольнике достигается в его вершине.

Покажем теперь, что это наибольшее значение меньше $\frac{3}{2}P$. Пусть оно достигается в вершине A. Почленно складывая неравенства

$$|AC| < |AB| + |BC|, \quad |AC| < |AD| + |DC|,$$

получаем, что $2|AC| < P$ и, тем более, что

$$2|AC| < P + 2\left(|BC| + |CD|\right).$$

Прибавляя к обеим частям последнего неравенства сумму $2|AB| + 2|AD|$, получаем требуемое неравенство

$$|AB| + |AC| + |AD| < \frac{3}{2}P$$

(см. [24]).

Для любого $k < \dfrac{3}{2}$ можно построить контрпример, полагая

$$|MA| = |MB| = |MD| = |CO| = \varepsilon ,$$

где ε – достаточно маленькое число (см. рис.57).

Заметим еще, что для отыскания внутри данного выпуклого четырехугольника точки с наименьшей суммой расстояний до вершин не нужно быть большим знатоком: это точка пересечения его диагоналей.

Задача **5-11**. *Ответ*: можно.

На рисунке 58 показано, как разрезать прямоугольный равнобедренный треугольник с длиной катета 7 см на 6 попарно различных равнобедренных прямоугольных треугольников.

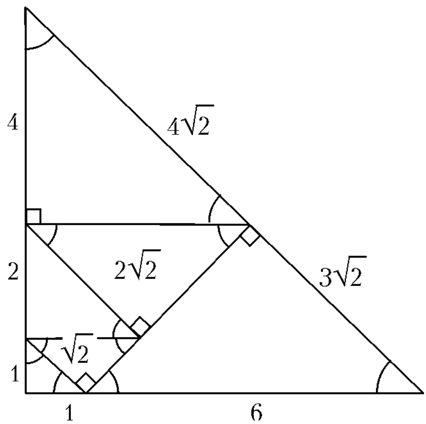


Рис. 58

∇ Оказывается, верно такое утверждение: равнобедренный прямоугольный треугольник можно разрезать на любое, большее 10, число попарно неравных равнобедренных прямоугольных треугольников.

Сначала покажем, как можно разрезать его на любое четное число частей $2k$, где $k \geq 3$. Будем исходить из равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C. Продолжим его катеты CA и CB и проведем прямую l через вершину B перпендикулярно гипотенузе – см. рисунок 59.

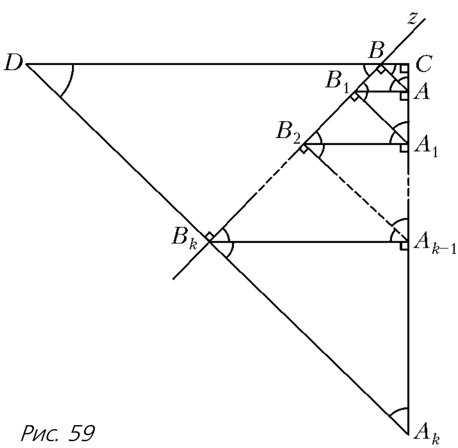


Рис. 59

Построим ломаную $AB_1A_1B_2A_2B_3 \ldots B_kA_k$, все звенья B_iA_i которой параллельны прямой AB, а все звенья A_iB_{i+1} параллельны прямой BC; через последнее звено B_kA_k ломаной проведем прямую, которая пересечет прямую

BC в некоторой точке D. В результате мы придем, как легко показать, к прямоугольному равнобедренному треугольнику DCA_k, разбитому требуемым образом на $2k + 2$ подобных попарно неравных равнобедренных прямоугольных треугольника (частный случай этой конструкции при $k = 2$ использован в решении задачи 5-11).

В цепочке треугольников ACB, BAB_1, AB_1A_1, $A_1B_1B_2$, $B_2A_1A_2$, … …, $A_{k-1}B_kA_k$ каждый следующий треугольник подобен предыдущему с коэффициентом подобия $\sqrt{2}$ (гипотенуза предыдущего треугольника равна катету следующего), поэтому в последовательности отрезков CA, AA_1, A_1A_2, …, $A_{k-1}A_k$ каждый последующий вдвое длиннее предыдущего. Отсюда вытекает практический способ разрезания данного треугольника требуемым образом.

Пусть нужно разделить равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a на $2k + 2$ частей. Отложим от вершины прямого угла на катете последовательно отрезки длиной $\frac{a}{2^k-1}$, $\frac{2a}{2^k-1}$, $\frac{4a}{2^k-1}$, … …, $\frac{2^{k-1}a}{2^k-1}$ (так как $1+2+\ldots+2^{k-1}=2^k-1$, это можно сделать); полученные точки и будут вершинами A, A_1, A_2, …, A_k ломаной описанной выше конструкции.

Итак, можно разрезать треугольник на $2k$ частей при $k \geq 3$. Поскольку меньший из полученных при этом треугольников можно опять разрезать на 6 частей указанным выше способом, мы можем разрезать исходный треугольник на $2k + 5l$ частей, где k − любое целое число, большее 3, а l − любое натуральное число. Но любое целое число, большее 10, представляется в таком виде, так что высказанное утверждение справедливо.

Остался открытым вопрос о возможности разбиения треугольника на $n \leq 5$, $n = 7$ и $n = 9$ частей. Решение этого вопроса мы оставляем читателю.

Задача **5-12**. *Ответ*: можно.

Эскиз нужной конструкции с девятью нитками − на рисунке 60. Для ее изготовления в качестве стержней удобно взять 3 карандаша.

Если все нитки одинаковой длины l и стержни имеют одинаковую длину d, то для жесткости конструкции, изображенной на рисунке 60, необходимо, чтобы

$$d = l\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}} \approx 1,47l .$$

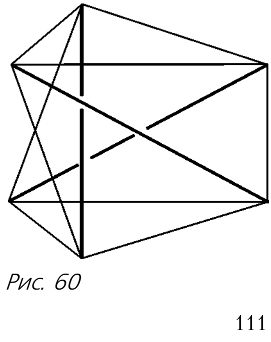


Рис. 60

В нашей конструкции концы стержней образуют два правильных треугольника, расположенных в плоскостях, перпендикулярных прямой, соединяющей их центры, и повернутых на некоторый угол друг относительно друга. Сами стержни лежат на попарно скрещивающихся прямых.

∇ Соединение стержней и ниток на рисунке 60 такое же, как у октаэдра (образует граф октаэдра – см. рис.67 к задаче 5-15). Доказать математически существование такой конструкции (достаточность условия $d = l\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}$) трудно.

Это соединение изобрел в 60-х гг. архитектор Б.Фуллер. После него появилось множество различных конструкций такого типа. При написании этой книги авторы поставили следующую задачу: изготовить жесткую пространственную конструкцию из стержней и ниток так, чтобы стержни не соприкасались между собой и от каждого конца стержней отходило ровно по две нитки. Такое соединение было изготовлено архитектором В.Колейчуком. Схема соединения показана на рисунке 61.

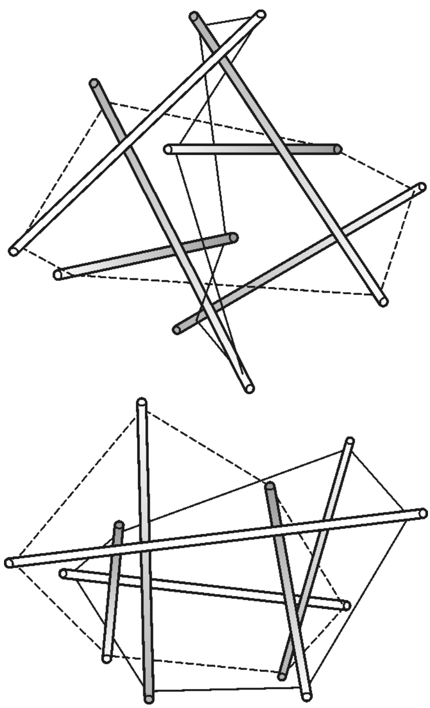


Рис. 61

Архитектор, инженер и дизайнер Ричард Букминстер Фуллер приобрел наибольшую известность благодаря своим конструкциям под названием «геодезический купол». Им и был введен связанный с ними термин «*самонапряжение (tensegrity)*».

Однако архитектор Вячеслав Колейчук, много занимавшийся такими системами в 90-х годах прошлого века, поставил под сомнение приоритет Б.Фуллера. Он утверждал, что впервые такие системы были изобретены нашим отечественным конструктивистом Карлом Иогансоном в 1921 г. Этим системам посвящено большое количество современных исследований с применением в интерактивных и адаптивных конструкциях.

В архитектуре термин «тенсегрити» обозначен Б.Фуллером как «свойство каркасных структур, в которых задействуются цельные детали, нагруженные на натяжение, и составные детали, нагруженные на сжатие, работать таким образом, что каждая деталь функционирует с максимальной эффективностью и экономичностью».

Интересно, что писатель и антрополог Карлос Кастанеда (по личному разрешению Б.Фуллера!) использовал термин «тенсегрити» для обозначения системы дыханий, движений и позиций тела, разработанных индейскими шаманами, жившими в древней Мексике, направленной на формирование определенных свойств и качеств человека, занимающегося по этой системе. Таким образом, тенсегрити по Кастанеде – модернизированная версия некоторых движений и дыханий, называемых «магическими пассами».

Понятие «тенсегрити» используется также при исследовании процессов в биологии (особенно в биологии клетки) и в некоторых других отраслях, например, в исследованиях строения текстильных тканей, дизайне, исследованиях социальных структур, ансамблевой музыке и геодезии.

Особо отметим применение математической основы этого понятия в химии. В конце XX века возник большой интерес к *фуллеренам* (конечно, названным в честь Б.Фуллера) или *бакиболам* (или *букиболам*). Так называют молекулярные соединения, принадлежащие классу аллотропных форм углерода[2] (другие формы – алмаз, карбин и графит) и представляющие собой выпуклые замкнутые многогранники, составленные из четного числа (трехкоординированных) атомов углерода (именно по этому принципу построены геодезические конструкции Б.Фуллера). Сначала рассматривали лишь структуры, включающие

[2] *Аллотропия* – свойство существования одного и того же типа химического элемента в виде двух или нескольких простых веществ, различных по строению и свойствам. Например, графит и алмаз – аллотропические формы углерода.

только пятиугольные и шестиугольные грани. По теореме Эйлера для многогранников, если n, e и f – количество вершин, ребер и граней многогранника соответственно, то $n - e + f = 2$. С помощью этой теоремы можно доказать, что необходимым условием существования указанного выше многогранника служит наличие у него ровно 12 пятиугольных граней и $\left(\frac{n}{2} - 10\right)$ шестиугольных граней. В состав молекул фуллерена могут входить, помимо атомов углерода, и атомы других химических элементов.

Возможность существования фуллеренов была предсказана в 1971 г. в Японии, а теоретически обоснована в 1973 г. в СССР. За открытие фуллеренов Х.Крото, Р.Смолли и Р.Керлу в 1996 г. была присуждена Нобелевская премия по химии. В настоящее время продолжается интенсивное изучение этих соединений.

Задача **5-13**. *Ответ*: можно.

Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a (рис.62,a) и пространственный шестиугольник $AA_1B_1C_1CDA$ (его вершины не лежат в одной плоскости). Оказывается, что сквозь этот шестиугольник (а значит, и сквозь куб) можно свободно, не задевая его сторон, протащить куб с ребром a.

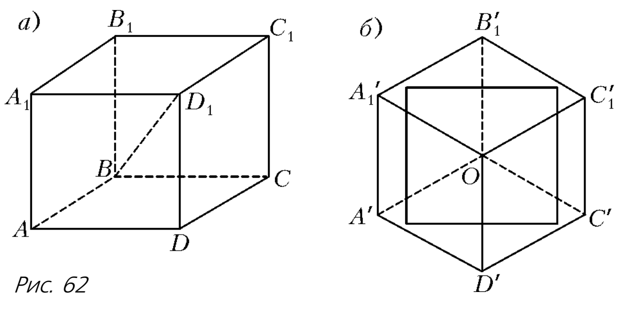


Рис. 62

Чтобы убедиться в этом, изобразим на рисунке 62,*б* проекцию куба на плоскость, перпендикулярную его диагонали BD_1. В силу симметрии куба эта проекция– правильный шестиугольник $A'A_1'B_1'C_1'C'D'$, где A' – проекция точки A, A_1 – проекция точки A_1 и т.д. Таким образом, контур шестиугольника $A'A_1'B_1'C_1'C'D'$ – проекция пространственного шестиугольника $AA_1B_1C_1CD$, а в центр O правильного шестиугольника проектируются оба конца диагонали куба BD_1.

Поскольку синус угла между любым ребром куба и его диагональю равен $\sqrt{2/3}$, то сторона правильного шестиугольника равна $a\sqrt{2/3}$, а радиус вписанной в него окружности равен $a\sqrt{2}/2$ – половине диагонали квадрата со стороной a. Поэтому в шестиугольнике целиком, не задевая его сторон, поместится квадрат с центром в точке O и стороной a, как показано на рисунке 62,*б*.

Отсюда вытекает, что если поставить куб с ребром a так, чтобы его нижняя грань совпала с квадратом на рисунке 62,*б*, и двигать куб перпендикулярно плоскости шестиугольника, то куб не заденет сторон шестиугольника. Значит, его можно также протащить и сквозь пространственный шестиугольник вдоль диагонали BD_1.

Таким образом, в деревянном кубе можно пробить сквозную дыру, через которую можно протащить такой же куб – см. рисунок 63.

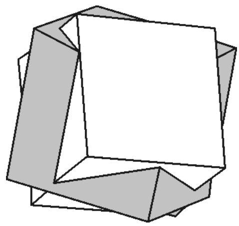


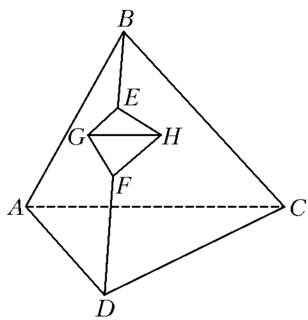
Рис. 63

∇ Из приведенных рассуждений вытекает, что сквозь куб с ребром a можно протащить даже куб несколько больших размеров, чем он сам, а именно любой куб с ребром, меньшим чем $\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2}a$.

Задача **5-14**. *Ответ*: существует.

На рисунке 64 приведен пример такого многогранника. Он получен следующим образом: на ребре BD тетраэдра $ABCD$ сделана «зарубка» из двух треугольных граней – GEH и GFH. У него 8 вершин, 6 граней, 12 ребер.

∇ В многограннике, изображенном на рисунке 64, две грани являются шестиугольниками с двумя общими ребрами, BE и FD. В выпуклом многограннике такая ситуация невозможна: две грани выпуклого многогранника могут иметь не более одного общего ребра.



Задача **5-15**. а) *Ответ*: можно. Пример приведен на рисунке 65.

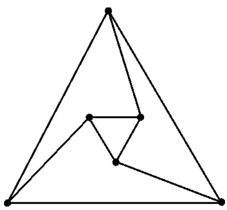


Рис. 64

Рис. 65

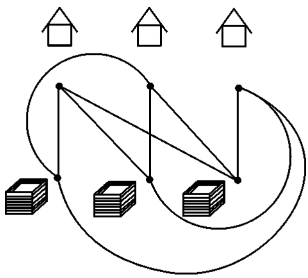


Рис. 66

∇ Эта задача напоминает известную задачу «о домиках и колодцах»: можно ли начертить на плоскости девять не пересекающихся дорог, которые соединяют каждый из трех «домиков» с каждым из трех «колодцев»? В этой сети дорог (так же, как в задаче 5-15) 6 вершин и от каждой вершины отходят 3 отрезка (рис.66). Однако ответ на вопрос «о домиках и колодцах» отрицательный: такую сеть начертить нельзя.

Ключом к доказательству этого факта служит **теорема Эйлера**: *пусть n – число вершин, m – число отрезков, соединяющих некоторые из этих вершин, f – число многоугольников, на которые разбита плоскость этими отрезками; тогда* $n + f = m + 1$ (см. [92]).

Для знатоков. Имеет место **теорема** (Вагнер, Фари, Штейн): *если граф можно изобразить на плоскости без пересечений, то его можно изобразить на плоскости и так, чтобы все его ребра были отрезками*. Необходимое и достаточное условие планарности графа – **теорема Понтрягина–Куратовского**: *граф можно без пересечений изобразить на плоскости тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу с шестью вершинами типа «домики – колодцы» или полному графу с пятью вершинами* (пять точек, попарно соединенных ребрами) (см. [92]).

б) *Ответ*: можно.

Пример показан на рисунке 67. Можно считать, что здесь изображен проволочный октаэдр (рис.68), сфотографированный из точки, лежащей вблизи центра одной из его граней.

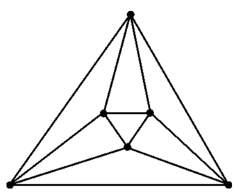


Рис. 67

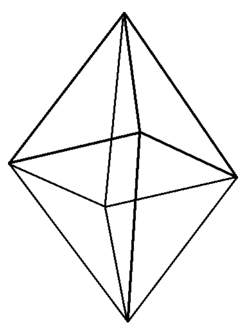


Рис. 68

Задача **5-16**. а) *Ответ*: существует.
Пример показан на рисунке 69.

∇ Для любого четного $n \geq 6$ существует замкнутая ломаная из n

звеньев, пересекающая каждое свое звено ровно один раз. Пример для

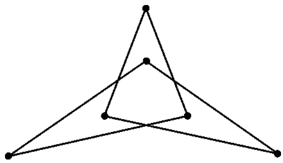


Рис. 69

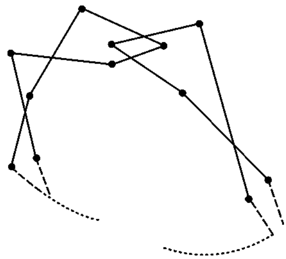


Рис. 70

$n = 6$ уже построен, а для $n \geq 8$ на рисунке 70 показана конструкция части такой ломаной (закон построения остальной части ясен).

б) *Ответ*: не существует.

Предположим, что удалось построить такую ломаную. Рассмотрим какую-нибудь точку ее самопересечения. В ней пересекаются два звена, причем больше ни с какими другими звеньями они не пересекаются. Поэтому все звенья ломаной можно разбить на пары, соответствующие точкам ее самопересечения. Значит, звеньев − четное число и их не может быть семь.

∇ Это рассуждение показывает, что вообще не существует ломаной с нечетным числом звеньев, пересекающей каждое свое звено ровно один раз.

Задача **5-17**. *Ответ*: а) можно; б) нельзя.

а) На рисунке 71,*а* показано, как можно разложить 24 монеты требуемым образом. Поясним, как это сделано.

Пусть радиус монет равен R. Расположим центры четырех монет в вершинах ромба со стороной $2R$. Из таких ромбиков можно набирать нужные узоры, стыкуя их крайними (расположенными по большой диагонали) монетами.

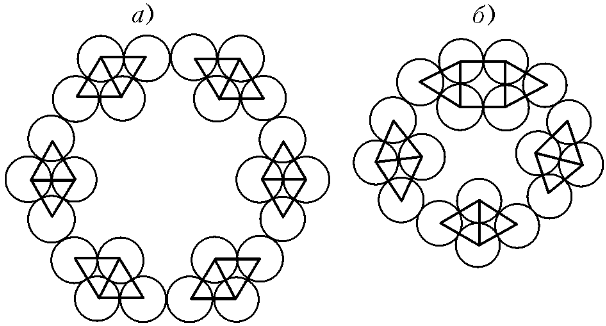


Рис. 71

б) Предположим, что 25 монет разложены на плоскости требуемым образом, и придем к противоречию.

Отметим на краю каждой монеты те три места, в которых она касается трех других. Подсчитаем общее количество отмеченных мест двумя способами. С одной стороны, число отмеченных мест четно, так как эти места разбиваются на пары в точках касания монет. С другой стороны, число отмеченных мест нечетно, так как оно равно количеству монет 25, умноженному на 3.

Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

∇ Интересно выяснить, при каких k нельзя расположить на плоскости некоторое (конечное) число одинаковых круглых монет так, чтобы каждая касалась k остальных. Оказывается, этого нельзя сделать при $k > 3$. Докажем это.

Предположим, что на плоскости разложены одинаковые круглые монеты так, что каждая из них касается k других. Отметим на плоскости центры всех монет и рассмотрим их выпуклую оболочку – наименьший содержащий их выпуклый многоугольник. Пусть A, B и C – три последовательные его вершины; тогда угол ABC меньше 180°. Пусть монета с центром в точке B касается монет с центрами $O_1, O_2, \ldots, O_k$ (центры занумерованы в порядке обхода вокруг точки B в одном из двух возможных направлений). Легко показывается, что каждый из углов O_1BO_2, O_2BO_3, …, $O_{k-1}BO_k$ не меньше $60°$. Отсюда вытекает, что должно выполняться неравенство $k \cdot 60° \le 180°$, из которого следует, что $k \le 3$.

Покажем теперь, как при $k = 3$ можно разложить требуемым образом любое достаточно большое четное число монет. Для этого удобно использовать заготовки двух типов: «ромбик» из четырех монет и «фонарик» из шести монет.

Из четырех «ромбиков» легко собрать цепочку из 16 монет. На рисунке 71,*б* показано, как можно эти «ромбики» и «фонарики» сложить замкнутой цепочкой, содержащей 18 монет. Любое большее четное число можно представить в виде суммы $4n + 6m$ и собрать соответствующую цепочку из n «ромбиков» и m «фонариков».

Интересны аналогичные вопросы о расположении шаров в пространстве. В 1953 г. доказано, что к шару в пространстве можно приложить не более 12 таких же шаров [116].

Задача **5-18**. *Ответ*: может.

Поставим в соответствие каждому человеку точку, причем разным людям – разные точки. Если два человека знакомы между собой, то соединим соответствующие им точки отрезком. Тогда задача сведется к такой: существует ли схема, у которой нет треугольников, а каждые две точки либо соединены отрезком, либо являются противоположными вершинами ровно одного четырехугольника?

На рисунке 72,*а*, *б* приведены два простейших примера таких схем. Нам требуется привести пример схемы, состоящей более чем из четырех точек. На рисунке 72,*в* приведен пример схемы из 16 точек и 40 отрезков, удовлетворяющий условию. Полученная схема удовлетворяет условию задачи. В этом можно убедиться перебором, который упрощается из-за симметрии схемы.

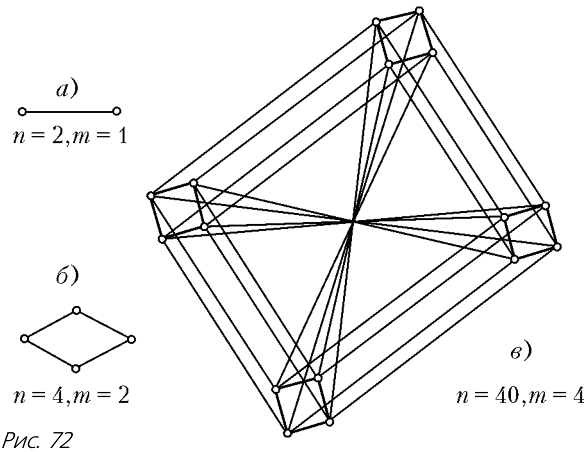


Рис. 72

∇ Интересно, что описанная в решении задачи 5-18 конфигурация может быть описана как множество вершин, ребер и больших диагоналей *четырехмерного куба*.

Можно показать, что в условиях задачи 5-18 у каждого человека в данной компании имеется одинаковое количество знакомых. Действительно, пусть для каждого человека A через M_A обозначено множество его знакомых, а через N_A – множество людей, незнакомых с A. Тогда каждому элементу из N_A можно поставить в соответствие пару элементов из M_A (тех, с кем он знаком). Нетрудно доказать, что соответствие между множеством N_A и множеством всевозможных пар элементов M_A будет взаимно однозначным. Следовательно, если в M_A содержится m_A элементов, то в N_A их содержится $\frac{m_A(m_A-1)}{2}$, а всего в компании соберется $n = 1 + m_A + \frac{1}{2}m_A(m_A-1)$ людей. Это равенство выполняется для любого человека A. Но уравнение

$$1 + x + \frac{1}{2}x(x-1) = n$$

имеет (при $n > 1$) только один положительный корень, поэтому число m_A одно и то же для всех A (см. [10]).

Полного ответа на вопрос, при каких значениях n существуют подобные компании, мы не знаем. Как показано выше, $n = 1 + m(m+1)/2$, где m – количество знакомых одного человека. Нетрудно доказать, что такие компании не существуют при $m = 3$, $m = 4$ и при $m = 4k + 3$, где k – любое натуральное число. Все известные нам примеры таких компаний приведены на рисунке 72,*а*, *б*, *в*.

Задача **5-19**. *Ответ*: могло.

На рисунке 73 схематически показаны результаты всех партий турнира шахматистов, удовлетворяющего условию задачи. В нем каждая пара шахматистов сыграла по 7 партий. При этом:

– первый выиграл у второго две партии;

– второй выиграл у первого две партии;

– первый выиграл у третьего три партии;

– третий выиграл у первого четыре партии;

– остальные партии турнира окончились вничью.

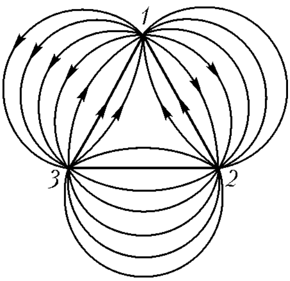


Рис. 73

В этом турнире первый шахматист набрал 6,5 очков, второй – 7 очков, третий – 7,5 очков; при этом первый выиграл больше всех – 5 партий, второй проиграл меньше всех – 2 партии, а больше всех очков набрал третий.

		+ – =	a b $n-a-b$	+ – =	c d $n-c-d$
+ – =	b a $n-a-b$			+ – =	e f $n-e-f$
+ – =	d c $n-c-d$	+ – =	f e $n-e-f$		

Рис. 74

∇ Можно составить табличку турнира (рис.74): обозначить все количество выигрышей (+), проигрышей (–) и ничьих (=) буквами и записать все условия задачи. При этом получится система линейных неравенств с большим числом переменных. Решение задачи 5-19 показывает, что эта система имеет по крайней мере одно решение в натуральных числах. Конечно, оно не единственно; интересно получить описание всех решений. Подробное обсуждение этой задачи см. в [39, 40].

Задача **5-20**. *Ответ*: можно.