БИБЛИОТЕЧКА
КВАНТ+
ВЫПУСК
121

Приложение к журналу
«Квант+» №3/2011

Н.Б. Васильев, В.Л. Гутенмахер,
Ж.М. Раббот, А.Л. Тоом

ЗАОЧНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Москва
2011

УДК 373.167.1:51+51(075.3)
ББК 22.1я721
В19

Серия «Библиотечка «Квант»
основана в 1980 году

Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л.

В19 Заочные математические олимпиады. – М., МЦНМО, 2011. – 192 с. (Библиотечка «Квант$^+$». Вып. 121. Приложение к журналу «Квант$^+$» №3/2011.)

ISBN 978-5-94057-817-8

Основу книги составляют задачи, предлагавшиеся на Всесоюзных заочных математических олимпиадах и конкурсах Всесоюзной заочной математической школы для учащихся старших классов (ныне ВЗМШ). Задачи разбиты на тематические циклы, за которыми следуют их решения, обсуждения и дополнительные вопросы для самостоятельного обдумывания.

Цель книги – научить читателя творчески относиться к решению каждой интересной задачи, показать ему, с какими другими математическими вопросами связана эта задача и какие общие закономерности лежат в основе ее решения.

Книга предназначена для школьников старших классов, учителей математики и руководителей математических кружков, а также для всех любителей математических задач.

ISBN 978-5-94057-817-8 ББК 22.1я721

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга адресована тем, кто любит решать нестандартные математические задачи.

Специфика заочного обучения и заочных, «домашних» олимпиад состоит в том, что задачи предлагаются на длительное время. При такой неторопливой исследовательской работе естественно не только решить конкретную задачу, но также найти ее обобщения и связи с другими задачами.

Цель книги – помочь читателю в этой работе. За разрозненными фактами мы старались увидеть контуры важных математических понятий и конструкций, показать, что обобщение сравнительно несложных задач иногда выводит на передний край математики.

В первом параграфе книги собраны разнообразные по содержанию и простые по формулировке занимательные задачи.

В каждом из следующих пяти параграфов за условиями задач следует их обсуждение: сначала привидится элементарное решение, затем в большинстве случаев (после знака ∇) предлагается обобщение и иногда (после слов «для знатоков») идет более трудный текст, использующий терминологию современной математики. Каждый из этих параграфов заканчивается большим списком задач для самостоятельного решения; кроме вопросов, близких к уже разобранным, в их число включены также новые темы для исследования.

Обширный список литературы, приведенный в конце книги, указывает основные источники, которыми мы пользовались, и рассчитан на то, чтобы дать читателям возможность глубже разобраться в заинтересовавшей их проблеме.

За пять лет, прошедших после первого издания книги, мы получили много писем и отзывов от любителей математики. Некоторые задачи использовались на различных очных и заочных математических конкурсах, послужили основой докладов учащихся на математических конференциях; по книге давались задания ученикам заочной математической школы.

Этот опыт был учтен при переработке книги. Добавлено много задач, в частности, составлены циклы задач: решение уравнений в целых числах, делимость многочленов, геометрические построения, доказательство неравенств, последовательности; включены новые темы и в параграф «Необычные примеры и конструкции». Задачи для самостоятельного решения мы старались расположить и снабдить указаниями так, чтобы помочь читателю повторить основные приемы рассуждений.

Мы хотели бы выразить глубокую признательность академику И.М.Гельфанду, председателю Научного совета Всесоюзной заочной математической школы, за постоянное внимание к нашей работе и ценную критику. Среди математиков, книги и советы которых оказали влияние на нашу работу, в первую очередь должны быть названы В.И.Арнольд, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, Н.Н.Воробьев, М.Л.Гервер, П.Б.Гусятников, Я.Г.Синай, Д.Б.Фукс, И.М.Яглом, Г.Н.Яковлев. Полезными предложениями, задачами и опытом занятий по книге поделились с нами М.И.Жгенти, А.В.Карзанов, Э.Б.Кикодзе, А.К.Ковальджи, Н.Н.Константинов, С.М.Львовский, П.И.Масарская, Н.Е.Сохор, А.А.Третьяков, А.Х.Шень, М.В.Якобсон и многие другие наши друзья и коллеги. Мы благодарны за помощь в подготовке рукописи Н.Ю.Вайсман, Л.Г.Серебренниковой, Л.В.Черновой и особенно С.Л.Табачникову, участие которого значительно превзошло обязанности редактора.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Со времени второго издания нашей книги прошло 25 лет. За это время она многократно использовалась для заданий учащимся математического отделения ВЗМШ и С-З МШ (соответственно Всесоюзной − затем Всероссийской − и Северо-Западной заочных школ), а также на различных соревнованиях и при обучении школьников в нашей стране и за рубежом.

В 1998 году скончался один из авторов книги, Николай Борисович Васильев, выдающийся математик, педагог и просветитель. Поэтому настоящее издание готовилось к печати без его, обычно весьма продуктивного, участия.

Впрочем, текст, в основном, остался без изменений. Исправлено решение одной задачи (№ 1-23), дополнены решения нескольких задач (№ 1-1, 5-12, 5-20, 5-21, 6-10, 6-13). Ну и, конечно, если во втором издании про что-то было написано «недавно», сейчас это пришлось заменить более точными ссылками за давностью сроков. Добавлен тематический указатель.

Мы хотели бы поблагодарить всех наших коллег и друзей, которые своими советами помогли нам в работе над этим изданием. Помимо математиков и педагогов, перечисленных в предисловии ко второму изданию, мы хотели бы назвать Р.Зигангирова, Ю.И.Ионина, А.Г.Кушниренко, Л.Левина, Ю.П.Соловьева, И.Ф.Шарыгина, Е.Я. Гика. Мы благодарны директору МЦНМО И.В.Ященко за внимание к этой книге.

Просьба читателям присылать письма с конструктивной критикой и отзывами о книге в адрес Издательства МЦНМО.

Авторы

§ 1. ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЕРВОГО ЗНАКОМСТВА

1-1. Можно ли в листе бумаги, вырванном из школьной тетради, прорезать такую дыру, в которую пролезет взрослый человек?

1-2. В уравнении

$$\left(x^2 + \ldots\right)(x+1) = \left(x^4 + 1\right)(x+2)$$

одно число стерто и заменено точками. Найдите стертое число, если известно, что один из корней этого уравнения равен единице.

1-3. Петя тратит $1/3$ часть своего времени на занятия в школе, $1/4$ – на игру в футбол, $1/5$ – на прослушивание пластинок, $1/6$ – на телевизор, $1/7$ – на решение задач по математике. Можно ли так жить?

1-4. Четыре числа попарно сложили и получили шесть сумм. Известны четыре наименьшие из этих сумм: 1, 5, 8 и 9. Найдите две остальные суммы и сами исходные числа.

1-5. Какое наибольшее число воскресений может быть в году?

1-6. Четыре девочки – Катя, Лена, Маша и Нина – участвовали в концерте. Они пели песни. Каждую песню исполняли три девочки. Катя спела 8 песен – больше всех, а Лена спела 5 песен – меньше всех. Сколько песен было спето?

1-7. Три купчихи – Олимпиада, Сосипатра и Поликсена – пили чай. Если бы Олимпиада выпила на 5 чашек больше, то она выпила бы столько, сколько две другие вместе. Если бы Сосипатра выпила на 9 чашек больше, то она выпила бы столько, сколько две другие вместе. Определите, сколько каждая выпила чашек и у кого какое отчество, если известно, что Уваровна пила чай вприкуску, количество чашек чая, выпитых Титовной, кратно трем, а Карповна выпила 11 чашек.

1-8. Дама сдавала в багаж: диван, чемодан, саквояж, картину, корзину, картонку и маленькую собачонку. Диван весил столько же, сколько чемодан и саквояж вместе, и столько же, сколько картина и картонка вместе. Картина, корзина и картонка весили поровну, причем каждая из них – больше, чем собачонка. Когда выгружали багаж, дама заявила, что собака не той породы. При проверке оказалось, что собака перевешивает диван, если к ней на весы добавить саквояж или чемодан. Докажите, что претензия дамы была справедлива.

1-9. Мотоциклист и велосипедист выехали одновременно из пункта A в пункт B. Проехав треть пути, велосипедист остановился и поехал дальше лишь тогда, когда мотоциклисту оставалась треть пути до B. Мотоциклист, доехав до B, сразу поехал обратно. Кто приедет раньше: мотоциклист в A или велосипедист в B?

1-10. Длины катетов прямоугольного треугольника равны a и b. На его гипотенузе как на стороне во внешнюю сторону треугольника построен квадрат. Найдите расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата.

1-11. За весну Обломов похудел на 25%, затем за лето прибавил в весе 20%, за осень похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел ли он или поправился за год?

1-12. Ивана Александровича Хлестакова пригласили управлять департаментом и в течение трех дней прислали ему 35000 курьеров. Если бы в первый день было прислано вдвое больше курьеров, чем на самом деле, то общее число курьеров было бы пятой степенью того числа, на которое в третий день прислали курьеров больше, чем во второй. Сколько курьер присылали каждый день?

1-13. После представления «Ревизора» состоялся следующий диалог.

Бобчинский: Это вы, Петр Иванович, первый сказали «Э!». Вы сами так говорили.

Добчинский: Нет, Петр Иванович, я так не говорил. Это вы семгу первый заказали. Вы и сказали

«Э!». А у меня зуб во рту со свистом.

Бобчинский: Что я семгу первый заказал, это верно. И верно, что у вас зуб со свистом. А все-таки это вы первый сказали «Э!».

Выясните, кто первым сказал «Э!», если известно, что из девяти произнесенных в этом диалоге фраз-утверждений четное число верных.

1-14. а) У стены круглой комнаты диаметром 3 м на полу сидит кузнечик. Каждый его прыжок имеет длину 2 м. Он начинает прыгать. В какие точки комнаты он может при этом попасть?

б) Тот же вопрос, если комната квадратная со стороной 2 м, а кузнечик вначале сидит в углу.

1-15. Новая шахматная фигура «жираф» ходит «буквой Г» на четыре клетки в одном направлении и на пять клеток – в другом. Какое наибольшее число жирафов можно расставить на шахматной доске так, чтобы ни один не мог напасть на другого, сколько бы он ни ходил?

1-16. Четверо ребят – Алеша, Боря, Ваня и Гриша – соревновались в беге. На следующий день на вопрос, кто какое место занял, они ответили так:

Алеша: Я не был ни первым, ни последним.

Боря: Я не был последним.

Ваня: Я был первым.

Гриша: Я был последним.

Известно, что три из этих ответов правильные, а один – неверный. Кто сказал неправду? Кто был первым?

1-17. Города A и B расположены на реке на расстоянии 10 км друг от друга. На что пароходу потребуется больше времени: проплыть от A до B и обратно или проплыть 20 км по озеру?

1-18. Андрей бегает на лыжах быстрее Вити, но медленнее Жени. Они одновременно побежали по круговой дорожке из одного места в одном направлении и остановились в момент, когда были все трое в одном месте. За это время Женя обогнал Витю 13 раз. Сколько всего было обгонов?

1-19. Стальную плитку размерами 73×19 см обвели карандашом на бумаге. Найдите центр полученного прямоугольника, имея в распоряжении только эту плитку и карандаш.

1-20. Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие равное число знакомых в этой компании. (Если A знаком с B, то B знаком с A.)

1-21. Последовательность чисел строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на единицу. Так, на втором месте стоит число 14, так как $7^2 = 49$, а $4 + 9 + 1 = 14$. На третьем месте стоит число 17 и т. д. Какое число стоит на 1000-м месте?

1-22. В 9 «Г» классе учатся три брата: Алеша, Леня и Саша. Учитель заметил, что если кто-то из них получает подряд две четверки или две тройки, то дальше он учится кое-как и получает тройку; если он получает подряд две пятерки, то совсем перестает заниматься и получает двойку, а если он получает две разные оценки, то следующей будет большая из них, В начале полугодия Алеша получил оценки 4 и 5, Леня – 3 и 2, Саша – 2 и 4. Какие итоговые оценки они получат за это полугодие, если учитель выставил каждому по 30 оценок, а итоговая оценка – ближайшее целое число к среднему арифметическому полученных оценок?

1-23. Математик шел домой вверх по течению ручья со скоростью, в полтора раза большей, чем скорость течения, и держал в руках шляпу и палку. На ходу он бросил в ручей шляпу, перепутав ее с палкой. Вскоре, заметив ошибку, он бросил палку в ручей и побежал назад со скоростью вдвое большей той, с какой шел вперед. Догнав плывущую шляпу, он мгновенно достал ее из воды, повернулся и как ни в чем ни бывало пошел домой с прежней скоростью. Через 40 секунд после того, как он догнал шляпу, он встретил палку, плывущую ему навстречу. Насколько раньше пришел бы он домой, если бы все время шел вперед?

1-24. Существует ли такое целое число, которое при зачеркивании первой цифры уменьшается: а) в 67 раз; б) в 58 раз?

1-25. Четверть участников шахматного турнира составляли гроссмейстеры, остальные были мастера. Каждые два участника сыграли друг с другом один раз. За выигрыш присуждалось очко, за ничью – пол-очка, за проигрыш – ноль. Мастера в сумме набрали в 1,2 раза больше очков, чем гроссмейстеры. Сколько было мастеров и сколько гроссмейстеров?

1-26. Существует ли четырехугольная пирамида, у которой две противоположные боковые грани перпендикулярны плоскости основания?

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Задача **1-1.** *Ответ*: можно. Примерный способ показан на рисунке 1. Количество изгибов полоски можно делать больше или меньше, в зависимости от солидности того, кто должен пролезать.

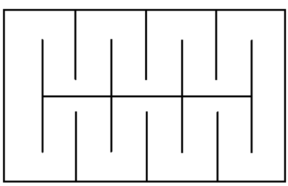

Рис. 1

∇ Решение задачи 1-1 – рисунок 1 – имеет непосредственное отношение к электронной технике.

Пусть (рис. 2,*а*) электрический ток i проходит в металл через сопротивление (резистор) величины R_1, а затем выходит из него. Как удвоить сопротивление? Естественная идея – удвоить его длину (рис. 2,*б*).

В электронных приборах требовалось многократно увеличивать сопротивления, что привело бы на этом пути к оборудованию гигантских размеров и веса. Поэтому миниатюризация – одна из основных целей электронной промышленности: ведь никто не будет, например, ходить с сотовым телефоном размером с чемодан!

Доктор Феликс Зандман (Dr. Felix Zandman, 1927–2011) предложил совершенно другую идею, благодаря которой, не увеличивая размеры резистора, можно многократно увеличивать сопротивление (рис. 2,*в* – сравните с рисунком к решению задачи 1-1!). Эта гениальная идея пришла ему в голову во время обеда, а рисунок на обеденной салфетке, материализующий идею, выставлен теперь в музее. Эта идея – одно из самых важных изобретений XX века в области электроники, так как привела к созданию миниатюрных резисторов. Она и ряд других идей позволили Ф.Зандману основать и успешно руководить всемирно известной фирмой Vishay Intertechnology (см. [123]).

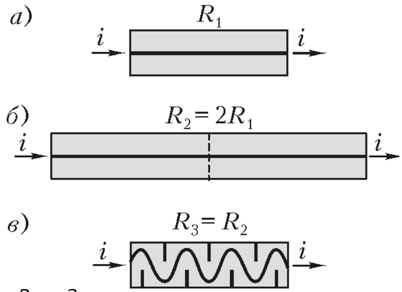

Рис. 2

Задача **1-2.** *Ответ*: 2. Чтобы найти стертое число, достаточно подставить в уравнение $x = 1$.

Задача **1-3.** Если Петя может делать несколько дел одновременно, то можно; если же нет – то нельзя: сумма данных чисел больше единицы.

Задача **1-4.** *Ответ*: две остальные суммы равны 12 и 16, а сами числа равны либо (-1), 2, 6 и 10, либо $(-3/2)$, $5/2$, $13/2$ и $19/2$.

Задача **1-5.** *Ответ*: 53. Среди любых семи последовательно идущих дней обязательно встречается одно воскресенье. Поскольку $365 = 52 \cdot 7 + 1$, $366 = 52 \cdot 7 + 2$, то в любом году получается 52 семерки дней (недель) и еще остаток – 1 или 2 дня. В каждой семерке ровно одно воскресенье, а в остатке – одно или ни одного. Всего получается не более 53 воскресений. Пример года, когда было 53 воскресенья – 1984-й. Столько же воскресений было в 1989, 1995, 2000 гг.

Задача **1-6.** *Ответ*: 9 песен. Если за каждую песню давать каждой ее исполнительнице по конфете, то общее число призовых конфет будет кратно трем.

Задача **1-7.** *Ответ*: Олимпиада Карповна выпила 11 чашек, Сосипатра Титовна – 9 чашек, Поликсена Уваровна – 7 чашек.

Задача **1-8.** Обозначим массы предметов первыми буквами их названий: Д – масса дивана, Ч – чемодана, С – саквояжа, К – картины (а также корзины и картонки – они весили поровну), М – маленькой собачонки. Если претензия дамы несправедлива, то:

$$Д = Ч + С = 2К,\ К > М,\ М + С > Д,\ М + Ч > Д.$$

Отсюда $М > Ч$, $М > С$, $2К = Ч + С < 2М < 2К$ – противоречие.

Задача **1-9.** *Ответ*: велосипедист приедет раньше. Поскольку велосипедист проехал треть пути раньше, чем мотоциклист проехал две трети, то скорость велосипедиста больше половины скорости мотоциклиста.

Задача **1-10.** *Ответ*: $\left(\sqrt{2}/2\right)(a+b)$. Пристроим извне ко всем сторонам квадрата такие же треугольники, как данный, таким образом, чтобы их катеты составляли продолжение друг друга – рисунок 3. Катеты этих треугольников образуют новый квадрат, центр которого совпадает с центром прежнего. Искомое расстояние равно половине диагонали нового квадрата, откуда следует ответ.

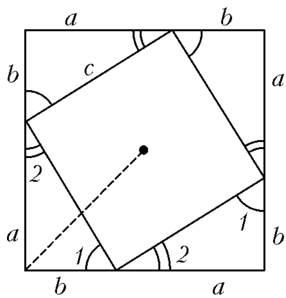

Рис. 3

Задача **1-11.** *Ответ*: похудел. Если в начале весны Обломов весил M кг, то к концу года он стал весить $0,75 \cdot 1,2 \cdot 0,9 \cdot 1,2M = 0,972M$ кг.

Задача **1-12.** *Ответ*: 24049, 5471, 5480 курьеров в первый, второй и третий дни соответственно. Единственная пятая степень целого числа, заключенная в промежутке от 35 000 до 70 000, – это 9^5.

Задача **1-13.** *Ответ*: Бобчинский. Вычеркивая два равносильных утверждения, мы не меняем четности числа верных среди оставшихся, а вычеркивая два противоположных утверждения, мы меняем четность.

Задача **1-14.** а) *Ответ*: все точки кольца с внутренним диаметром 1 м и внешним 3 м (на рис.4,*а* это кольцо заштриховано). Ясно, что кузнечик не может приблизиться к центру комнаты ближе чем на полметра. Чтобы показать, что кузнечик может попасть в любую точку указанного кольца, надо сначала показать, что он может попасть в любую точку у стены.

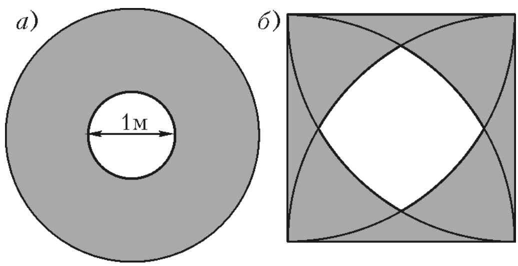

Рис. 4

б) *Ответ* см. на рисунке 4,*б*, где заштриховано искомое множество точек. Оно представляет собой всю комнату, за исключением пересечения четырех кругов радиуса 2 м с центрами в углах комнаты.

Задача **1-15.** *Ответ*: 16 жирафов. На рисунке 5 показано, как можно расставить 8 жирафов: каждого из них можно поставить в любую клетку, на которой стоит его номер. Остальных 8 жирафов можно расставить симметрично первым восьми.

Задача **1-16.** *Ответ*: неправду сказал Ваня; первым был Боря. Если предположить, что неправду сказал Алеша, то получится, что он был первым или последним, Но тогда неправду сказал еще либо Ваня, либо Гриша, а это противоречит условию – неправду сказал только один из мальчиков. Аналогично рассматриваются и все другие возможности.

2	3	4	5				
3	4	5	6				
4	5	6	7				
5	6	7	8				
				1	2	3	4
				2	3	4	5
				3	4	5	6
				4	5	6	7

Рис. 5

Задача **1-17.** *Ответ*: больше времени требуется на путь по реке. Пусть скорость парохода равна u, скорость течения v. Если $u \le v$, то пароход вообще не выплывет против течения, если же $u > v > 0$, то решение сводится к доказательству неравенства

$$\frac{10}{u+v}+\frac{10}{u-v}>\frac{20}{u}.$$

Задача **1-18.** *Ответ*: 25. Те 13 моментов времени, когда Женя обгонял Витю, разбивают все время движения на 14 промежутков, и за каждый промежуток Женя опережал Витю ровно на один круг. Значит, Женя сделал на 14 кругов больше Вити. Пусть Андрей сделал на k кругов больше Вити. По условию $0 < k < 14$. Рассуждая аналогично, получаем, что Андрей обогнал Витю $k-1$ раз. Но Андрей сделал на $14-k$ кругов меньше Жени, и поэтому Женя обогнал его $13-k$ раз. Всего произошло $13+(k-1)+(13-k)=25$ обгонов.

Задача **1-19.** На каждой из больших сторон прямоугольника отложим от концов по 19 см. Получим прямоугольник 35×19, имеющий общий центр с исходным, а в нем мы уже сможем провести диагонали, которые пересекаются в центре (рис.6).

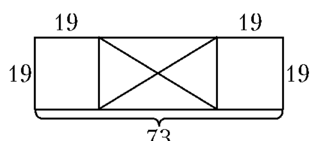

Рис. 6

Задача **1-20.** Пусть в компании k человек. Тогда каждый из них имеет в этой компании не меньше нуля и не больше $k-1$ знакомых. Если предположить, что количества знакомых у всех людей различны, то получится противоречие. Действительно, тогда один имеет нуль знакомых, второй – одного, третий – двух и т.д., наконец, последний имеет $k-1$ знакомых. Но это значит, что последний знаком со всеми, в частности, с первым, а тот ведь не был знаком ни с кем!

Задача **1-21.** *Ответ*: 11. Вычислим несколько первых членов данной последовательности:

$$7;\ 14;\ 17;\ 20;\ 5;\ 8,\ 11;\ 5;\ \ldots$$

Пятерка повторилась, значит, дальше будет период, состоящий из трех чисел: 5, 8, 11.

Задача **1-22.** *Ответ*: Алеша и Саша получат оценки 4, а Леня – оценку 3. Начиная выписывать сценки каждого из ребят, обнаруживаем, что с некоторого момента они периодически повторяются. Это схематически изображено на рис.7. Подсчитав средние значения оценок, получаем ответ.

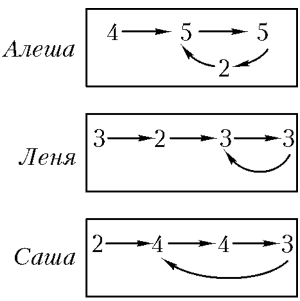

Рис. 7

Задача **1-23.** *Ответ*: на две с половиной минуты. Пусть v – скорость течения ручья, а t – время в минутах, которое он бежал назад. Тогда скорость ходьбы равна $\frac{3}{2}v$, скорость бега – $3v$, а расстояние, которое он пробежал назад, равно $3vt$.

Далее, расстояние, которое он прошел за 40 сек $= \frac{2}{3}$ минуты вперед от того места, где он выудил шляпу, до того, где он встретил плывущую палку, равно $\frac{3}{2}v \cdot \frac{2}{3} = v$, а расстояние, которое проплыла палка, пока он ее не встретил, равно $v\left(t+\frac{2}{3}\right)$.

Следовательно, мы можем написать уравнение

$$3vt = v + v\left(t+\frac{2}{3}\right),$$

где после сокращения v мы получаем, что $t = \frac{5}{6}$ мин.

Теперь посчитаем потерянное время. Оно состоит из двух частей, из которых первая (t) вдвое меньше второй $(2t)$: сколько времени он бежал назад и сколько времени он шел вперед − это одно и же расстояние, а всего $3t = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ мин.

Рассмотрим другой способ решения с использованием тех же обозначений, но основанный на сравнении расстояний не в неподвижной системе отсчета, связанной с берегом, а в подвижной — связанной с движущейся палкой.

После того как математик бросил палку, он удалился от нее на расстояние, равное $(3v - v) \cdot t$, а после того, как он выудил шляпу, он сблизился с палкой на то же самое расстояние, равное $\left(\frac{3}{2}v + v\right) \cdot \frac{2}{3}$. Составив уравнение

$$(3v - v) \cdot t = \left(\frac{3}{2}v + v\right) \cdot \frac{2}{3}$$

и решив его, мы получим, что $t = \frac{5}{6}$ мин, откуда $3t =$ $= 2{,}5$ мин.

По берегу математик бежал t мин с одной скоростью, а затем прошел то же расстояние в обратном направлении со скоростью в 2 раза меньшей, поэтому обратно он шел $2t$ мин, а потерянное время составляет $3t$ мин.

Если рассмотреть графики движения математика — $OBCE$, шляпы — AC и палки — BD (см. рис.8), то можно лучше понять ситуацию, описанную в задаче.

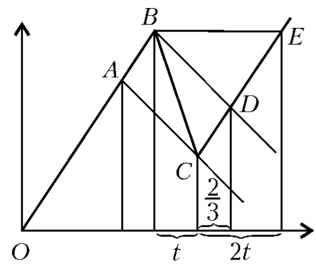

Рис. 8

Все участки графиков — отрезки, так как на каждом из них движение происходило с постоянной скоростью.

Точка A графика соответствует моменту, когда математик бросил шляпу, AC — график движения шляпы. Точка B соответствует моменту, когда математик бросил палку, BD − график движения палки.

Задача **1-24.** *Ответ*; а) существует, например 7125; б) не существует. Обозначим через x зачеркиваемую цифру, через k − количество остальных цифр, через y − число, остающееся после зачеркивания. Тогда $x \cdot 10^k + y = 58y$, откуда $x \cdot 10^k = 57y$. В последнем равенстве правая часть содержит простой множитель 19, которого левая часть содержать не может.

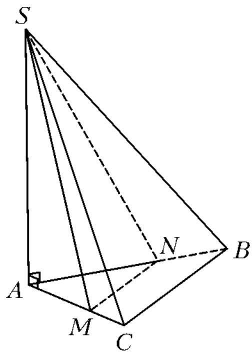

Рис. 9

Задача **1-25.** *Ответ*: 9 мастеров и 3 гроссмейстера. Если n − число участников матча, то $\frac{n(n-1)}{2}$ − общее количество очков в этом матче.

Задача **1-26.** *Ответ*: существует. Пример такой пирамиды приведен на рисунке 9, Она построена следующим образом. Берется треугольная пирамида $SABC$, у которой боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Ее боковые грани SAC и SAB перпендикулярны основанию (как плоскости, проходящие через перпендикуляр AS к основанию). Возьмем теперь произвольные точки M и N на сторонах AC и AB основания соответственно. Пирамида $SMNBC$ удовлетворяет условию задачи.

§ 2. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА И МНОГОЧЛЕНЫ

2-1. Ученику прислали задание, состоящее из 20 задач. За каждую верно решенную задачу ему ставят 8 баллов, за каждую неверно решенную – минус 5 баллов, за задачу, которую он не брался решать, – 0 баллов. Ученик получил в сумме 13 баллов. Сколько задач он брался решать?

2-2. Можно ли разменять 25 рублей на рублевые, трехрублевые и пятирублевые купюры так, чтобы получить всего 10 купюр?

2-3. На миллиметровой бумаге нарисован прямоугольник 272×204 мм (его стороны идут по линиям сетки). Проведем его диагональ и отметим все узлы сетки, которые на ней лежат. На сколько частей узлы делят диагональ?

2-4. а) От прямоугольника 324×141 мм отрезают несколько квадратов со стороной в 141 мм, пока не останется прямоугольник, у которого длина одной стороны меньше 141 мм. От полученного прямоугольника отрезают квадраты, стороны которых равны по длине его меньшей стороне, до тех пор, пока это возможно, и т.д. Какова длина стороны последнего квадрата?

б) Найдите какие-нибудь два числа a и b, чтобы при таком разрезании прямоугольника $a \times b$ получились квадраты шести разных размеров.

2-5. Три автомата печатают на карточках пары целых чисел. Каждый автомат, прочитав некоторую карточку, выдает новую карточку; прочитав карточку с парой $(m;n)$, первый автомат выдает карточку $(m-n;n)$, второй – карточку $(m+n;n)$, третий – карточку $(n;m)$. Пусть первоначально имеется карточка с парой чисел (19; 86). Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить из нее карточку: а) (31; 13); б) (12; 21)?

2-6. Один мастер делает на длинной ленте пометки синим карандашом от ее начала через каждые 36 см. Другой мастер делает пометки красным карандашом от начала через каждые 25 см. Может ли синяя пометка оказаться на расстоянии 1 см от какой-нибудь красной?

2-7. Можно ли с помощью циркуля и линейки разделить угол в $19°$ на 19 равных частей?

2-8. Окружность разделена 20 точками на 20 равных частей.

Сколько можно построить различных замкнутых ломаных из 20 равных звеньев с вершинами в этих точках? (Две ломаные, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.)

2-9. Верно ли, что из 100 произвольных целых чисел всегда можно выбрать:

а) 15; б) 16

таких, у которых разность любых двух делится на 7?

2-10. Докажите, что если сумма квадратов двух целых чисел делится на 3, то и каждое из них делится на 3.

2-11. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы кубов трех неотрицательных целых чисел.

2-12. В классе 28 учеников, которые сидят по двое на 14 партах. В начале каждого месяца учитель рассаживает их так, чтобы за каждой партой сидели двое, никогда до этого рядом не сидевшие. Какое наибольшее число месяцев учитель сможет это делать?

2-13. Найдите какие-нибудь три последовательных натуральных числа, каждое из которых делится на квадрат целого числа, большего единицы.

2-14. Можно ли расставить все 12 чисел 1, 2, ..., 12 по окружности так, чтобы для любых трех чисел a, b, c, стоящих подряд, число $b^2 - ac$ делилось на 13?

2-15. Верно ли, что при любом натуральном n число $n^3 + 5n - 1$ простое?

2-16. Докажите, что при любом целом n число $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120.

2-17. Существует ли многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами такой, что:

а) $p(0) = 19$, $p(1) = 85$, $p(2) = 1985$;

б) $p(1) = 19$, $p(19) = 85$?

2-18. Разложите многочлен:

а) $x^8 + x^4 + 1$ на три множителя,

б) $x^5 + x + 1$ на два множителя с целыми коэффициентами.

2-19. При каком значении a многочлены $x^4 + ax^2 + 1$ и $x^3 + ax + 1$ имеют общий корень?

2-20. Рассмотрим множество M натуральных чисел, представимых в виде $x^2 + 5y^2$, где x и y – некоторые целые числа.

а) Докажите, что произведение двух чисел из M также принадлежит M.

б) Назовем *базисным* число из M, большее 1, которое не делится ни на одно из чисел из M, кроме себя и 1. Существуют ли числа из M, которые можно двумя разными способами представить в виде произведения базисных?

в) Докажите, что базисных чисел бесконечно много.

2-21. Нетрудно указать тройку квадратов целых чисел, образующих арифметическую прогрессию: 1, 25, 49. Найдите еще три такие тройки (из квадратов чисел, не имеющих общего делителя).

2-22. а) Найдите 7 решений в целых числах уравнения

$$y^2 = 6\left(x^3 - x\right).$$

б) Найдите еще 4 его решения в рациональных числах.

Обсуждение задач

Задача **2-1.** *Ответ*: ученик решал 13 задач.

Пусть x − количество правильно решенных задач, y − неправильно решенных. Тогда $8x - 5y = 13$. Переписав это уравнение в виде

$$8(x + y) = 13(1 + y),$$

мы видим, что число $x + y$ делится на 13. С другой стороны, по условию, $x + y$ не больше 20. Поэтому $x + y = 13$ (при этом $x = 6$, $y = 7$).

∇ Можно решать уравнение $8x - 5y = 13$ так. Одно решение сразу угадывается: $x_0 = 1$, $y_0 = -1$. При любом целом t пара чисел $x = 1 + 5t$, $y = -1 + 8t$ тоже удовлетворяет этому уравнению. Действительно,

$$8(1 + 5t) - 5(-1 + 8t) = (8 + 5) + (40t - 40t) = 13.$$

При этом $x + y = 13t$, а так как $x + y \le 20$, то $t = 1$, $x + y = 13$, $x = 6$, $y = 7$.

Для любого линейного уравнения вида $ax - by = c$ *(a и b − взаимно простые числа) общий вид решений в целых числах можно записать по такой же схеме.* Находим какое-нибудь одно его целое решение $(x_0; y_0)$. Тогда $x = x_0 + bt$, $y = y_0 + at$, где $t \in \mathbb{Z}$, − все его решения.

Задача **2-2.** *Ответ*: нельзя.

Допустим, что можно взять k рублевых, l трехрублевых и m пятирублевых купюр так, чтобы выполнялись условия задачи, т.е. $k + l + m = 10$ и $k + 3l + 5m = 25$.

Вычитая из второго равенства первое, получим: $2l + 4m = 15$. Но последнее равенство невозможно, так как его левая часть четна, а правая − нет. Значит, наше предположение неверно.

∇ *Вообще уравнение вида* $ax - by = c$ *имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда c делится на наибольший общий делитель н.о.д. (a, b) чисел a и b.*

В задаче **2-2** c = 15 не делится на н.о.д.(a, b) = н.о.д. (2; 4) = 2.

Задача **2-3.** *Ответ*: на 68 частей.

Разобьем каждую из двух смежных сторон прямоугольника на 68 одинаковых частей и через точки деления проведем прямые по линиям сетки. Тогда диагональ прямоугольника разобьется узлами сетки на 68 одинаковых частей, служащих диагоналями прямоугольников размером 3×4 мм. На диагонали каждого такого прямоугольника нет ни одного узла сетки.

∇ В общем случае диагональ прямоугольника $m \times n$ разбивается узлами сетки на н.о.д. (m, n) одинаковых отрезков.

Задача **2-4.** а) *Ответ*: 3 мм. Произведем деление с остатком:

$324 = 141 \cdot 2 + 42$ (2 квадрата со стороной 141 мм),

$141 = 42 \cdot 3 + 15$ (3 квадрата со стороной 42 мм),

$42 = 15 \cdot 2 + 12$ (2 квадрата со стороной 15 мм),

$15 = 12 \cdot 1 + 3$ (1 квадрат со стороной 12 мм),

$12 = 3 \cdot 4$ (4 квадрата со стороной 3 мм).

∇ Для произвольного прямоугольника $a \times b$ длина стороны последнего квадрата равна н.о.д. (a, b).

Действительно, процедура последовательного деления с остатком, которую мы проделали в решении задачи, − это алгоритм Евклида нахождения н.о.д. (a, b) (см. [34, 88, 98]).

Алгоритм Евклида основан на таком факте. *Пусть a = bq + r, тогда н.о.д.(a, b) = н.о.д.(b, r).* Сам алгоритм можно описать так. Если имеются два числа a и b, причем $a > b > 0$, то сначала делим a на b и получаем остаток $(0 \le r_1 < b)$. Затем делим число b на r_1 и находим остаток r_2 $(0 \le r_2 < r_1)$. Далее делим число r_1 на число r_2, при этом получается остаток r_3 $(0 \le r_3 < r_2)$, и т.д., пока какой-нибудь остаток r_{n-1} не разделится на остаток r_n нацело, т.е. $r_{n+1} = 0$. Последний ненулевой остаток r_n и есть н.о.д. (a, b). В самом деле,

$$r_n = \text{н.о.д.}(r_n, r_{n-1}) = \text{н.о.д.}(r_{n-1}, r_{n-2}) = \ldots$$

$$\ldots = \text{н.о.д.}(r_2, r_1) = \text{н.о.д.}(r_1, b) = \text{н.о.д.}(a, b).$$

В задаче 2-4 а) мы встретились с геометрической иллюстрацией этого алгоритма.

Отметим еще, что по последовательности частных $q_1, q_2, \ldots, q_n$, получающихся в процессе применения алгоритма Евклида, можно записать *разложение дроби a/b в цепную дробь* (см. [66, 61, 119]):

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots + \cfrac{1}{q_n}}}.$$

б) *Ответ*: например, $a = 21$, $b = 13$.

Действительно, произведем деление с остатком; $21 = 1 \cdot 13 + 8$; $13 = 1 \cdot 8 + 5$; $8 = 1 \cdot 5 + 3$; $5 = 1 \cdot 3 + 2$; $3 = 1 \cdot 2 + 1$; $2 = 2 \cdot 1$. Таким образом, получаются квадраты со сторонами соответственно 13, 8, 5, 3, 2, 1 – шести разных размеров.

∇ Для произвольного натурального числа n можно найти такие числа a и b, чтобы при разрезании получилось ровно n разных размеров квадратов.

В качестве таких чисел можно взять числа F_{n+2} и F_{n+1} *последовательности Фибоначчи*, которая задается следующим образом: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, …, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ для $k \geq 3$.

Если положить $a = F_{n+2}$ и $b = F_{n+1}$, то каждый раз от прямоугольника $F_k \times F_{k-1}$ будет отрезаться только один квадрат со стороной длины F_{k-1} и оставаться прямоугольник $F_{k-1} \times F_{k-2}$.

В решении задачи 2-4 б) мы взяли $F_7 = 13$ и $F_8 = 21$; размеры квадратов получились равными первым шести различным числам Фибоначчи: 1, 2, 3, 5, 8, 13.

Построенный пример прямоугольника $a \times b$ имеет наименьшие возможные (при данном n) размеры; другими словами, если числа a и b не больше F_{n+2}, то алгоритм Евклида дает н.о.д. (a, b) не больше чем за n шагов (см. [63]).

Заметим также, что для отношения F_{n+1}/F_n двух соседних чисел Фибоначчи разложение в цепную дробь имеет чрезвычайно простой вид; оно состоит из одних единиц. Например,

$$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}.$$

Задача **2-5.** а) *Ответ*: можно.

Обозначим операции автоматов соответственно I, II, III и условимся n сделанных подряд операций I или II записывать соответственно как I^n или II^n.

Тогда карточку (31; 13) можно получить из карточки (19; 86) так:

$$(19;86)\xrightarrow{\text{III}}(86;19)\xrightarrow{\text{I}^4}(10;19)\xrightarrow{\text{III}}(19;10)\xrightarrow{\text{I}}$$

$$\xrightarrow{\text{I}}(9;10)\xrightarrow{\text{III}}(10;9)\xrightarrow{\text{I}}(1;9)\xrightarrow{\text{III}}(9;1)\xrightarrow{\text{I}^7}$$

$$\xrightarrow{\text{I}^7}(2;1)\xrightarrow{\text{III}}(1;2)\xrightarrow{\text{II}}(3;2)\xrightarrow{\text{III}}(2;3)\xrightarrow{\text{II}}$$

$$\xrightarrow{\text{II}}(5;3)\xrightarrow{\text{III}}(3;5)\xrightarrow{\text{II}^2}(13;5)\xrightarrow{\text{III}}(5;13)\xrightarrow{\text{II}^2}$$

$$\xrightarrow{\text{II}^2}(31;13).$$

б) *Ответ*: нельзя.

Поскольку операции I, II, III сохраняют н.о.д.(m,n), а н.о.д.$(19;81)=1\neq$ н.о.д.$(12;21)=3$, из карточки (19; 81) нельзя получить карточку (12; 21).

∇ Необходимое и достаточное условие того, чтобы из карточки (m, n) можно было получить карточку (a, b), состоит в том, что н.о.д.(m, n) = н.о.д. (a, b).

Необходимость этого условия очевидна; все операции I, II, III сохраняют н.о.д.

Если это условие выполнено, то обе карточки с помощью операций I и III можно привести к карточке (d, d) по алгоритму Евклида.

Действительно, каждый шаг алгоритма Евклида − это деление с остатком числа a на число b: $a = bq + r$ ($0\le r<b$). Этот шаг можно провести так:

$$(a,b)\xrightarrow{\text{I}^q}(r,b).$$

Затем, после операции $(r,b)\xrightarrow{\text{III}}(b,r)$, можно аналогично сделать следующий шаг алгоритма и т.д. до тех пор, пока не получится карточка (d,d).

Идя по цепочке $(a,b)\to\ldots\to(d,d)$ в обратном порядке с заменой операции I на операцию II, мы из карточки (d,d) получим карточку (a,b).

Итак, проделав «спуск» от (m,n) к (d,d), а затем «подъем» от (d,d) к (a,b), мы придем в итоге от карточки (m,n) к карточке (a,b), что и требовалось.

Задача **2-6.** *Ответ*: может.

Например, 9-я синяя пометка и 13-я красная находятся друг от друга на расстоянии 1 см, так как $13\cdot25-9\cdot36=1$.