О ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ЗАОЧНОЙ ШКОЛЕ

А.Л.Тоом (г.Москва)

Темой этой статьи, как предполагал вначале автор, должна была стать проверка работ учеников в заочной математической школе. Но в процессе работы тему пришлось расширить, начав статью с изложения своего мнения о целях преподавания математики применительно к ЗМШ.

Общие замечания о преподавании математики

Учитывая, что наша десятая пятилетка - пятилетка эффективности и качества, уместно рассмотреть вопрос об эффективности и качестве учебного процесса ЗМШ, а для этого необходимо уяснить цели, к которым мы стремимся при преподавании математики школьникам. Какими мы хотим видеть специалистов, которыми станут со временем наши ученики? От чего зависит качество их работы?

Бытуют две крайние и уже потому неверные точки зрения на качество работы молодого специалиста. Первая из них состоит в том, что, если человек с дипломом работает плохо, то он просто лентяй, и его достаточно приструнить как следует, чтобы добиться от него высоких трудовых показателей - глубоких исследований, эффективных программ, продуманных проектов. Это точка зрения полностью игнорирует личные качества работника. Применение её в науке приводит к дутым отчетам и водянистым статьям.

В действительности овладение высшей математикой и успешное её применение на практике возможны только на основе достаточно высокого умственного развития, фундамент которого закладывается в детстве и юности.

Вот, например, одна из обычных формулировок предела: "Число A называется пределом последовательности (a_n), если для любого положительного ε, сколь бы мало оно ни было, можно указать такое N, что $|a_n - A| < \varepsilon$ для всех значений n, удовлетворяющих неравенству $n > N$".

Хотя эта фраза написана по-русски, она выглядит и звучит непривычно в силу грамматической сложности. Чтобы понять её, необходимо свободно обращаться со сложно-подчиненными предложениями. Например, математик должен уметь строить отрицание заключенного в ней утверждения, применять её к частным случаям, делать из неё выводы и т.п.

Мне приходилось заниматься не только со способными учениками, но и с отстающими, и я заметил, что "неспособность" к математике высоко коррелирует с недостатком общей культуры, в частности, с недостаточно свободным владением обыкновенным русским языком. Итак, в области творческого труда (куда я отношу, например, программирование) хорошо работает не тот, кого заставляют, а тот, кто понимает, что он делает. Как воспитать ученика, который хочет и может понять то, что он делает, - это основной вопрос, которому посвящена наша статья.

Противоположная крайняя точка зрения состоит в том, что для того, чтобы заниматься математикой, нужен талант, а талант - это якобы непостижимый природный дар. У кого он есть, тому мол, все дается без труда, а у кого его нет, из того заведомо ничего не выйдет. Эта точка зрения опровергается тем обстоятельством, что способные математики появляются, как из гнезд, в основном, из некоторых школ, а именно из тех, где работают талантливые, увлеченные своим делом педагоги, что было бы невозможно, если бы "талант" давался от природы в готовом виде. Идея, положенная в основу ЗМШ, - это, фактически, опровержение упомянутой неверной точки зрения. ВЗМШ, например, принципиально принимает, в основном, школьников из села и деревни - тех самых, кому грозит отсев при приеме в вузы как "неспособным", и старается открыть и развить в них способности к математике.

Не следует думать, что истина лежит где-то посередине между изложенными крайними точками зрения. Обе они, на наш взгляд, игнорируют главное, а именно-то, что способность к творческой работе можно развивать и воспитывать.

В области математики решающий этап в овладении материалом обычно обозначают словом "понимание". Когда говорят, что ученик понял ту или иную теорему, тот или иной кусок материала, имеют в виду, что в отношении этого ученика и этого куска материала основная цель обучения достигнута. Таким образом, развивать математические способности значит развивать способность к пониманию. Что же такое понимание ?

Я полагаю, что понимание - это процесс, а не состояние. Понимающий ум находится в непрерывном движении. В математике понимать - значит постоянно проверять общее частным, частное обобщать, рассматривать крайние и предельные случаи, приводить данные в систему, термины заменять их определениями, повторяющиеся конструкции заменять сокращениями, от формальных рассуждений переходить к наглядным представлениям и обратно, сомневаться в каждом утверждении и использовать эти сомнения для доказательств от противного, а также совершать ещё множество других умственных действий, не открытых современной психологией и не названных современным языком.

Стремление к пониманию в том виде, в каком оно необходимо для систематической работы, не вложено ни в кого от природы, а воспитывается (или не воспитывается) в течение всей жизни, начиная с раннего детства. Очевидно, ни в ком "математическая часть" не может отделяться от человека как целого. Каждый человек как целое больше или меньше стремится, лучше или хуже умеет понимать окружающее. Каждый, кто так или иначе преуспел в науке, несомненно когда-то "заразился" любовью к пониманию и смыслу от близкого человека, любимой книги или еще чего-нибудь.

Существуют, однако, и факторы, подавляющие стремление к пониманию.

"Как часто можно видеть воспитателя, ведущего группу на прогулку и беспрестанно покрикивающего: "Миша, не балуйся", "Таня, не останавливайся", "Валя, иди в паре", "Володя, не беги". Дети так привыкли к этом постоянному аккомпанементу, что на замечания почти не реагируют, а воспитатель,даже не успевая проверить, понято ли и выполнено ли его предыдущее указание, уже делает следующее." (С.Г.Файнберг, "Почему ребенок стал нервным", М., 1967, с.14).

Во многих домах отдыха, спортивных и пионерских лагерях, в поездах и парках культуры громкоговорители работают весь день на полную мощность, да и во многих семьях весь день работает трансляция, что, естественно, приучает слышать, не вникая в смысл.

Когда мы путешествуем по городу, наш взгляд скользит по всевозможным надписям, объявлениям, плакатам, не предназначенным, в сущности, для понимания.

Например, однажды я увидел в автобусе объявление о том,что автопарк приглашает шоферов на работу, в котором было сказано: "водителям гарантируется зарплата до 200 руб.". Очевидно, составители не рассчитывали, что эту фразу будут читать с пониманием, иначе они бы заметили, что она, в сущности, ничего не гарантирует. Попробуйте вникнуть в смысл слов часто исполняемых песен - от них уши вянут. Никто и не вникает, и это еще не самое худшее.

В дополнение к общечеловеческой этике, многие профессии предъявляют специальные этические требования. Существуют врачебная, юридическая, военная, научная и другие этики, призванные решать особые проблемы, с которыми сталкиваются лица этих профессий. Этические вопросы отнюдь не безразличны и при математическом образовании. Для занятий математикой требуется особая честность ума, которая, в свою очередь, требует специального воспитания. Об этом хорошо сказано в следующем отрывке: "Теперь я могу формулировать, что именно для меня неприемлимо в учебнике: он в лучшем случае обучает, но не воспитывает. А воспитывать нужно не только самостоятельность мышления, но и ту "математическую совесть", которая запрещает произносить пустые, лишённые точного смысла слова и выдавать за доказанное то, что только намечено." (Я.С.Дубнов, "Беседы о преподавании математики", М., 1965, с.227)

Одним из факторов, мешающих формированию "математической совести" у учеников, является подход к преподаванию, основанный на авторитете: "Это верно, потому, что я так говорю." Однажды мне случилось быть свидетелем того, как молодая учительница математики пришла советоваться к методисту: что делать, когда ученики не понимают необходимости тех требований, которые она им предъявляет. Методист сказал : "Да они просто обязаны исполнять ваши требования, и все тут!". При этом подходе фигура учителя вырастает в глазах ученика до гигантских размеров и заслоняет от него реальность мира математики. Требования строгости в рассуждениях воспринимаются учениками как бессодержательный ритуал, вынуждающий их произносить непонятные заклинания, чтобы ублаготворить педагога. В представлении учеников получается, например, что $lg\,2$ - это число, напечатанное в соответствующей графе таблицы логарифмов, и оно такое, а не иное, потому, что такое там напечатано.

В крайнем варианте подобный способ обучения превращается в попытки "запрограммировать" учеников, т.е. как бы встроить в них машинки, безошибочно выполняющие необходимые действия. К какому логическому концу это приводит, описано в рассказе американского фантаста Айзека Азимова "Профессия", который я рекомендую прочесть всем педагогам.

Самое худшее в описанном педагогическом подходе то, что, лишая учеников контакта с реальностью, он тем самым снимает с них ответственность перед этой реальностью. Получается дуэт, в котором учитель запевает басом: "Делай то, что я велю, делай так, как прикажу, я тут самый главный!", а ученики тоненько отвечают: "Тили-тили, трали-вали, это мы не проходили, это нам не задавали...". Те ученики, которые научились этой песне в школе, продолжают исполнять её в трудовой жизни.

Одна из трудностей заочного обучения заключается в том, что педагог не имеет возможности непосредственно видеть и слышать, как ученики воспринимают материал. Помню, еще будучи студентом, я вел математический кружок для школьников, и как-то раз сказал одному из них: "Ну, по этому вопросу вы можете иметь свое собственное мнение". Все одобрительно усмехнулись, вообразив, будто я издеваюсь над школьником, между тем как я сказал буквально то, что думал. Очевидно, школьники были приучены к тому, что учитель не может без иронии признавать их права на собственное мнение. Но я услышал реакцию аудитории и объяснил школьникам, что я думаю по этому поводу.

Педагог ЗМШ не слышит и не видит, как его ученики, живущие в сёлах и малых городах, реагируют на тот материал, который им посылается; он должен предвидеть их реакцию на основании своего педагогического и социального опыта. При этом он должен учитывать, что каждого ученика окружает своя микросреда, своего рода умственный микроклимат. Для одного ученика связная, последовательная, логичная речь и, тем самым, обладающее теми же качествами мышление - это привычная норма, а для другого - потрясающая неожиданность. Поэтому в заочном обучении совершенно недостаточно ограничиваться выставлением оценок или других столь же скупых значков. Необходимо, как это ни трудно, как-то общаться с учениками по существу, чтобы передать им нормы логичного мышления, заразить их "математической совестью", любовью к смыслу и пониманию. Главным достоинством ЗМШ перед другими формами заочного обучения я считаю то, что в ней широко практикуется писание проверяющими замечаний на полях ученических работ. Еще одна трудность преподавания математики связана с тем, что математика, будучи строгой наукой, преподается по необходимости нестрого. Ведь на школьном уровне задать правила логического вывода, как это делается в курсах логики, невозможно. Таким образом, учитель вынужден предъявлять ученикам некоторые рассуждения как верные и браковать некоторые их рассуждения как неверные, не предъявляя формальных правил, на основании которых он это делает. (Да если бы даже он эти правила предъявил бы , встал бы вопрос о том, почему выбраны такие правила). Я горячо приветствую подход к преодолению этой трудности, апеллирующий к разумению самих учеников, к уже накопленному ими за прожитую жизнь опыту умственной жизни. При этом подходе учитель демонстрирует, что математические правила не случайны, не произвольны, а соответствуют естественной необходимости.

Этому мешает нередкая беда при обучении математике - отсутствие преемственности с житейским здравым смыслом. Много правильного говорится о том, что в математике нельзя полагаться на очевидность, здравый смысл, интуицию, аналогии, неформальные соображения. Но слишком мало говорится о том, какую огромную роль в математике играют соображения очевидности, здравого смысла, интуиция, аналогии, неформальные соображения. Математик, не обладающий на самом деле здравым смыслом, интуицией, не умеющий рассуждать неформально - это жалкий педант, который никогда ничего не придумает. Другое дело, что внешне неформальные соображения не проявляются, за редким исключением они остаются неопубликованными и даже незаписанными. Но в действительности именно они обеспечивают возможность математического творчества, и их надо не изгонять, не запрещать и не высмеивать, а наоборот, бережно сращивать с требованиями формальной логики, учить ребят не выбрасывать, не подавлять свои соображения, а формализовать их, делать строгими, и тем самым закреплять, придавать им вид, в котором они могут храниться, передаваться и распространяться.

О проверке работ в ВЗМШ

Каждые один-два месяца ученикам ВЗМШ высылается очередное задание, содержащее как теоретический материал, так и тесно связанные с ним задачи, некоторые из которых объявляются контрольными. Месяца полтора спустя ученик должен прислать письменные решения контрольных задач, написанные в одной тетради. Специальные проверяющие (по одному на каждые пять-десять учеников) проверяют эти решения, пишут на полях различные замечания, а в конце тетради - общую рецензию, ставят отметку за выполнение задания, и тетрадь высылается обратно ученику, которому предлагается исправить ошибки в соответствии с указаниями проверяющего. Такова основа учебного процесса в ВЗМШ.

Из упомянутых трех видов информации, которые ученик получает о своей работе, а именно: замечаний на полях, рецензии и отметки, наиболее существенный, содержательный - замечания. Они пишутся рядом с решениями, к которым они относятся, и указывают конкретные ошибки, нечеткости, "дыры" в рассуждениях, контрпримеры, опровергающие неверные утверждения ученика, намечают идеи, до которых ученик не додумался, поясняют на конкретных примерах принципы математической работы. Рецензия в конце работы, собственно, подытоживает замечания. Она содержит общую характеристику работы и указывает, на что ученику следует обратить особое внимание. Сосредоточим свое внимание на замечаниях проверяющих и посмотрим на конкретных примерах, каковы типичные ошибки учеников, какие замечания к ним пишут проверяющие и каким образом эти замечания способствуют росту математической культуры учеников.

В каком порядке расположить наши примеры? Конечно, заманчиво было бы показать на этих примерах рост "среднего" ученика, последовательный переход от робких попыток к уверенному владению материалом. Но дело в том, что в действительности развитие реального подростка никогда не укладывается в одну прямую линию. В нем всегда борются различные тенденции. Например, ученик стал присылать осмысленные решения и, казалось бы, твердо усвоил на практике, как в математике надо рассуждать. Но всё это – на определенном привычном материале. И вот он получает задание совершенно нового типа, например, по элементам математического анализа. Как логично рассуждать в этом случае, он не знает, так как не имеет образцов, или имеет, но не может их понять. И ученик прибегает к бессмыслице, так как по опыту знает, что иногда это помогает. Вот пример.

I. <u>Задача</u>. "Докажите, что если последовательность (x_n) имеет предел A, то последовательность, полученная из неё любой перестановкой членов, тоже имеет предел A".

Один ученик, до этого довольно успешно решавший задачи по традиционному школьному курсу, на этот раз прислал такое решение:

$$"\lim x_n = A; \ \lim x_n = \lim(x_1, x_2, \dots x_n, \dots) =$$
$$= \lim x_1, \lim x_2, \dots, \lim x_n$$

а так как от перестановки слагаемых сумма не меняется, то и полученная последовательность имеет предел A.

$$\lim x_n = \lim x_1, \ \lim x_2, \ \dots, \ \lim x_n, \ \dots = A."$$

Конечно, ученик не мог не понимать, что это "решение" бессмысленно. Тем не менее, он, по-видимому, надеялся, что так сойдет. Возможно, он применял аналогичный метод, выполняя в школе задания по другим предметам, и не без успеха. То, чего ему не хватает, – это не только конкретные математические знания и навыки, но, что еще важнее, и "математическая совесть", упомянутая выше. Безнадежных учеников не бывает, и ученик, пишущий бессмыслицу, через год вполне может начать неплохо решать задачи, если в промежутке он успеет "заразиться" любовью к смыслу и пониманию. Лучшее, что может в этом случае сделать проверяющий – это написать замечание с позиции смысла, например, такое:

"Что такое $\lim x_1$? Ведь x_1 – это число, а предел бывает у последовательности чисел. Где Вы видите слагаемые и сумму? Число может равняться числу, но не последовательности чисел. Поэтому все, что Вы написали в качестве решения, не имеет смысла".

Конечно, я не думаю, что, получив такое замечание, ученик сразу напишет верное решение. Но его подход к дальнейшим занятиям, несомненно, станет более здравым.

2. Решая неравенство $x^{1964} > 1$, некоторые ученики пишут в качестве ответа: $x > \pm 1$. Очевидно, этим ученикам неинтересно, какие же, собственно, числа являются его решениями. Задача проверяющего – показать, что ему это интересно. Тут уместно, например, такое замечание: "Не понял, что значит $x > \pm 1$. Какие же числа удовлетворяют этому неравенству? Верно ли, что $0 > \pm 1$? Решите задачу заново и напишите ответ в таком виде, чтобы было понятно, какие числа в него входят, а какие – нет."

3. При решении уравнений с модулями приходится разбирать несколько случаев, и в одном из этих случаев уравнение может обратиться в тождество, то есть принять, например, такой вид:

$$2 - x = 2 - x .$$

Про это равенство ученики иногда пишут (особенно часто это бывало в первые годы работы ВЗМШ), что оно не имеет смысла, потому и решений. Конечно, неплохо, если проверяющий напишет полях : "Неверно! Это тождество, все числа – его решения." Но написать так – значит скорее повернуть лежачего больного одного бока на другой, чем вылечить его. Конечно, на одной задаче всему не научишь, но все же лучше использовать каждый случай, чтобы расшевелить ум ученика. В данном случае ученик продемонстрировал, что не имеет привычки по собственной инициативе проверить общее частным. Поэтому следует подтолкнуть его к этому. Для этого вместо написанного выше лучше написать, например, следующее: "подставьте $x = 0$, вы получите 2 = 2. Это верное равенство, значит $x = 0$ есть решение. Попробуйте подставлять другие значения x и посмотрите, при каких из них получаются верные равенства. Все эти значения и будут решениями". Конечно, второй вариант требует больше усилий от проверяющего, больше приходится писать, но и пользы он принес ученику больше. А время, потраченное на это замечание, окупится, быть может, в будущем.

4. Ученикам ВЗМШ предлагалась серия задач, в которых спрашивается, существует ли геометрический объект, обладающий заданными свойствами.

Вот типичная задача из этой серии:

"Существует ли треугольник, у которого все высоты меньше I см, а площадь-больше I00 кв.см ?"

Решая эту задачу, ученик сталкивается с некоторой специфической трудностью, преодоление которой для него очень полезно. Психологически решение этой задачи начинается с догадки: после более или менее долгих поисков возникает нечеткий образ треугольника с очень длинным основанием и вершиной, расположенной очень близко к этому основанию, где-то в середине. Возникает ощущение, что задача, в сущности, решена. Часто нетерпение побуждает ученика сразу писать решение. Он как-бы думает: что убедительно для меня, то будет убедительно и для других. Один ученик прислал, например, такое решение:

"Да, существует. Основание берем сколь угодно большое, а высоту 2-3 мм, тогда другие высоты будут меньше I см, так как угол близок к 180°."

Получив такое решение, проверяющий сталкивается с двойственной и потому особенно трудной задачей. Допустим, проверяющий напишет: "да, ваше решение правильно", и поставит соответственно хорошую отметку. Тогда ученик утвердится в мысли о том, что такое приблизительное подобие решения и есть все, что от него требуется. Допустим, проверяющий напишет: "нет, ваше решение неправильно", и поставит соответственно плохую отметку. Тогда ученик сломает тот верный ход мышления, который он здесь применил, и заменит его какими-нибудь фантастическими домыслами.

Вот как отреагировал проверяющий на это решение: "То,что Вы написали, - хорошая прикидка, которая должна была показать Вам, какие стороны и углы могут быть у Вашего треугольника. Вы вольны были писать или оставить при себе эту прикидку. Но Ответ должен был выглядеть так: "положим $a = \ldots$ см, $b = \ldots$ см, $c = \ldots$ см. Тогда треугольник с такими сторонами удовлетворяет условию задачи. Доказательство :........ " А без этого задача не решена!". Это хорошая рецензия, но не единственно возможная. Например, ученик явно не к месту употребляет выражение "сколь угодно большое", и можно поймать его на слове, написав: " что значит "сколь угодно большое основание"? Значит, никакое конкретное основание Вам не подойдет?"

5. <u>Задача.</u> "Найти множество точек на координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению: $x+|x| = y+|y|$.

Один ученик прислал такое решение:

" если $x=0$, то $y \leq 0$;
если $x<0$, то $y \leq 0$;
если $x>0$, то $y>0$.

Значит, этому неравенству удовлетворяют координаты всех точек I и III четвертей, также считая и точки, лежащие на осях".

Давайте разберемся, как тут получился неверный ответ. Заметим, что все три строчки со словами "если ... то..." по отдельности представляют верные утверждения. С другой стороны, единый текст, состоящий из этих трех строчек, можно трактовать как форму записи ответа задачи, и из этой трактовки действительно вытекает то, что ученик написал в конце решения. Итак, ученик верно написал нечто, потом проинтерпретировал то, что он написал, иначе, и из этой неправильной интерпретации правильно вывел ответ задачи. Ошибка, таким образом, остается вне текста, она, как знаменитый подпоручик Киже, фигуры не имеет. Эта ситуация типична. Ученики чаще всего ошибаются там, где их мысль остается в подтексте, между строк, не выраженной явно. Отсюда вытекает естественный эффективный способ борьбы с ошибками: снабжать учеников средствами для полной и недвусмысленной записи мыслей. При этом оказывается, что некоторые слова русского языка, в частности, "и", "или", "если...то..." и т.д. необходимо использовать в точном математическом смысле, а для этого об этом смысле надо договориться.

Что следует написать проверяющему по поводу приведенного выше решения? Можно написать, например, так:

"Ваш ответ неверен, так как этому неравенству удовлетворяют не все точки первой четверти. Например, если $x=1$, а $y=2$, уравнение принимает вид $2 = 4$, а это неверно. Ваша строчка "если $x>0$, то $y>0$ " верна если только её понимать буквально, и становится неверной, если её понимать так: "при $x>0$ y может принимать все положительные значения".

6. Один ученик для неравенства $x-[x] > y-[y]$ правильно нарисовал множество точек на координатной плоскости, ему удовлетворяющих, и написал: "не знаю, как записать решение". Для равенства $x-[x] = y-[y]$ он тоже правильно нарисовал множество и даже попытался написать решение. Оно выглядело так:

" если $x>0, y>0$, то $x-[x] = y-[y]$;
если $x>0, y<0$, то $x-[x] = y-[y]$;
если $x<0, y>0$, то $x-[x] = y-[y]$;
если $x<0, y<0$, то $x-[x] = y-[y]$.

После этого был начерчен правильный ответ. Такое "решение" вовсе не означает, что ученик срисовал чертеж у товарища. Просто он не умеет излагать свои мысли. Этот пример наглядно демонстрирует очень важное явление, которое только на первый взгляд может показаться парадоксальным: ученик, овладевая каждой новой ступенью материала, сначала обретает способность неведомо как приходить к правильному ответу, и лишь спустя некоторое время научается (или никогда не научается) вразумительно излагать ход мысли, приведшей его к этому ответу. Это связано с тем, что для того, чтобы записать ход мысли, надо осознать его. Чтобы пояснить, что значит осознать, прибегну к аналогии. Зритель, сидя в зале кинотеатра, не вдумывается в то, как сделан фильм, если только он не кино-профессионал. Он поглощен происходящем на экране. Напротив, режиссёр, монтирующий фильм за монтажным столом, просматривает кадр за кадром и думает именно о том, как его сделать.

Аналогичные этапы существуют и в работе математика, только во времени они расположены обычно в обратном порядке. Когда человека осеняет догадка, в нем стремительно проносится целый комплекс образов. Академик А.Н.Колмогоров, сам заядлый лыжник, сравнивал мышление математика в такие минуты со скоростным спуском с горы на лыжах. Но эта догадка остается личным делом ученого и не идет дальше его ближайших друзей и сотрудников, привыкших понимать его с полуслова. Она получает права гражданства только тогда, когда путем кропотливого труда осознается, т.е. шаг за шагом, как бы кадр за кадром, превращается в строгое рассуждение.

Все сказанное относится не только к профессиональным математикам, но и к школьникам, решающим задачи. Специфика заочного обучения состоит в том, что оно приносит наибольшую пользу ученикам, находящимся именно на упомянутой выше промежуточной ступени развития - они умеют догадываться, но еще не умеют записывать решения задач. Это совсем не мало, так как каждый ученик (и каждый ученый) проходит эту ступень развития не один раз, а много раз - каждый раз, как он сталкивается с существенно новым типом задач.