УДК 519

А. Л. Тоом

НЕСИММЕТРИЧЕСКАЯ КОММУНИКАЦИЯ, ФОКАЛИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ В ИГРАХ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В общей теории игр (в отличие от игр двух лиц с постоянной суммой) большое значение имеет коммуникация, общение между игроками. В монографии [1] (и во многих других работах) фактически предполагается, что все игроки располагают неограниченными возможностями общения между собой. Будем называть этот случай кооперативным (детали уточним ниже). Ясно, что кооперативный случай представляет собой идеализацию, от которой весьма далеки многие реальные ситуации. Противоположную идеализацию представляет собой некооперативный случай, то есть такой, когда игроки лишены всякой возможности общения между собой. Можно представить много случаев промежуточных между этими двумя, когда общение между игроками ограничено по условиям игры, но не исключено вовсе. Насколько известно автору, такие промежуточные случаи до сих пор мало исследованы. Видимо, это связано с тем, что в случаях, отличных от кооперативного, не удается ограничиться чисто математическим исследованием строго поставленных задач, а приходится привлекать методы гуманитарных наук. Так, в [2] показано, что в некооперативном случае (и во многих промежуточных случаях тоже) большое значение имеет явление «фокализации», зависящее от знаковой формы предъявления игры.

В центре внимания данной статьи находится один из промежуточных случаев — случай «монополии слова».

В этом случае один из игроков, называемый «монополистом», может послать любое сообщение, адресованное всем игрокам, а все прочие игроки не могут посылать никому никаких сообщений. Основное утверждение статьи можно неточно, но коротко сформулировать так: «монополия слова может приносить выгоду монополисту». Возможно, это утверждение имеет смысл рассматривать как формальный аналог одного из механизмов управления при помощи средств массовой информации. Так, замечание 3 в § 3 можно сопоставить с высказыванием, приписываемым английскому пресс-магнату лорду Нортклифу: «Сила прессы — в умолчании» (цитирую по [3, с. 262]).

Перечислим кратко содержание следующих параграфов. В § 2 описываются рассматриваемые процедуры игры и формулируются основные предположения об игроках. В § 3 формулируется основное утверждение. В §§ 4, 5 даются два конкретных примера. В § 6 дается описание хода размышлений игрока, которое может рассматриваться как неформальное доказательство основного утверждения работы. В § 7 кратко обсуждаются возможности обобщения основного утверждения.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Пусть в игре участвует n игроков. Обозначим их через $X_1, \ldots, X_n$. Пусть каждый игрок может совершить одно из m действий. Пронумеруем действия каждого игрока целыми числами от 1 до m. Пусть задан набор функций

$$f_i(A_1, \ldots, A_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant A_1, \ldots, A_n \leqslant m. \tag{1}$$

Выражение (1) означает выигрыш i-го игрока, если игрок X_1 совершил действие $A_1, \ldots,$ игрок X_n совершил действие A_n. Совокупность функций (1) будем называть матрицей игры. Пусть матрица игры ставит всех игроков в равные условия.

Точно это означает следующее. Назовем подстановку g чисел $1, \ldots, n$ автоморфизмом нашей игры, если

$$f_i(A_{g(1)}, \ldots, A_{g(n)}) = f_{g(i)}(A_1, \ldots, A_n) \tag{2}$$

при всех значениях $i, A_1, \ldots, A_n$, указанных в (1). Пусть матрица игры *однородна*, то есть группа автоморфизмов игры транзитивна на множестве чисел $1, \ldots, n$. Идея однородной игры и игры с ограниченным числом соседей (§ 5) заимствованы из [4].

Однако задание матрицы игры еще не определяет, в какое положение поставлены игроки. Должна быть задана процедура игры, которая бы содержала, в частности, ответ на следующие вопросы:

— Сколько раз производится выбор действий и выдача выигрышей.

— Какие возможности общения есть у игроков.

— Какого рода соглашения могут заключить игроки и, в частности, обязаны ли они исполнять их.

На каждый из этих трех вопросов может быть дано много различных ответов. В результате возникает много различных типов игр. Опишем, какие три из этих типов мы будем рассматривать. Во всех трех случаях выбор действий и выдача выигрышей производятся только один раз. Рассмотрим следующие этапы, которые могут входить в процедуру игры.

1. Игроки изолируются друг от друга.

2. Всем игрокам предъявляются правила игры, то есть матрица игры и список этапов игры.

3а. Всем игрокам предоставляется возможность общения друг с другом.

3б. Игроку X_1 (и только ему) предоставляется возможность составить сообщение, которое затем доводится до сведения всех остальных игроков.

4. Игроки выбирают действия. Каждый игрок свободен в выборе и имеет безусловное право выбрать любое из действий от 1 до m.

5. Игрокам выплачиваются выигрыши в соответствии с их действиями и матрицей игры.

Мы будем рассматривать и сравнивать между собой следующие три типа игр:

I. **Кооперативная игра.** Задается последовательностью этапов 2, 3а, 4, 5*.

II. **Некооперативная игра.** Задается последовательностью этапов 1, 2, 4, 5.

III. **Игра с монополией слова.** Задается последовательностью этапов 1, 2, 3б, 4, 5.

---

* Таким образом, то, что, здесь названо кооперативной игрой, не предусматривает обязывающих соглашений.

Мы определили, в какое положение поставлены игроки. Для того чтобы заключить, какие действия выберут игроки, необходимо знать что-то о них самих. Сделаем следующие предположения об игроках:

1. Для каждого игрока его собственный выигрыш — единственная ценность.

2. Игроки обладают неограниченными вычислительными возможностями*.

Мы увидим ниже, что этих двух предположений, вообще говоря, недостаточно для однозначного определения действий игроков. На выбор игрока, очевидно, влияет то, каких действий он ожидает от других игроков. Таким образом, имеет смысл делать дополнительные предположения *рефлексивного* характера (в смысле, описанном в [5, 6]). Будем обозначать через

$$X_{i_1}X_{i_2}\ldots X_{i_{k-1}}X_{i_k} \tag{3}$$

мнение игрока X_{i_k} о том, каково мнение игрока $X_{i_{k-1}}$ о том..., и так далее... о том, каково мнение игрока X_{i_2} об игроке X_{i_1}**. Рассмотрим два варианта дополнительного предположения об игроке X_i.

3а. Как только игрок X_i осознает какой-либо акт своей мысли, в нем возникает представление, что все остальные игроки знают (догадываются) об этом акте. Пользуясь (3), это можно записать так:

$$X_iX_i \equiv X_iX_jX_i \text{ при всех } j \neq i. \tag{4}$$

В частности, если игрок X_i задумает выбрать определенное действие A_k, то, по его мнению, все остальные тут же узнают об этом. Лишь в тех случаях, когда X_i пользуется каким-то датчиком случайных чисел, все остальные игроки — в его представлении — угадывают лишь сам факт обращения к датчику и параметры этого датчика, но не могут угадать конкретное число, выданное датчиком. Предположение 3а может показаться неестественным, однако именно оно лежит в основе теории игр двух лиц с постоянной суммой [5, с. 18].

---

* Только способность к совершению актов рефлексивного осознания предполагается ограниченной рамками языка рефлексивных многочленов.

** Мы употребляем символику, введенную в [5, 6] в несколько ином виде.

3б. Как только игрок X_i осознает какой-либо акт своей мысли, в нем возникает представление, что во всех остальных игроках совершился аналогичный акт, если только у них есть те же предпосылки, что и у X_i, для его совершения. Это можно записать так:

$$X_i X_i \equiv X_j X_i \text{ при всех } j \neq i. \qquad (5)$$

В §§ 4, 6 мы применим это условие 3б к конкретным случаям.

Сформулированные предположения о ходе игры и о свойствах игроков достаточны для наших целей, хотя, вообще говоря, и они могут еще не определять однозначно поведения игроков.

§ 3. ОСНОВНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ

Пусть задана матрица игры. Пусть выполняется условие (2), т. е. матрица не дает преимуществ никому из игроков. Тогда в кооперативном случае игроки, очевидно, договорятся о таких совместных действиях, которые принесут всем равный выигрыш (или равные математические ожидания выигрыша), и этот равный выигрыш будет максимален. Пусть существует такая комбинация действий, которая дает всем равный выигрыш, и при этой комбинации сумма выигрышей максимальна. Тогда, очевидно, игроки договорятся реализовать одну из таких комбинаций. Если такая комбинация единственна, то и в некооперативном случае она может реализоваться. Для этого каждый игрок должен вообразить, что все игроки, будто бы, собрались на совет. Тогда он вообразит, что совет постановил исполнять эту единственную наилучшую для всех комбинацию и будет действовать в соответствии с ней.

Но предположим, что есть много таких комбинаций, «наилучших для всех». Тогда игроки не смогут договориться о том, какую именно из этих комбинаций реализовать и неизбежно будут действовать несогласованно, как бы случайно. (Предполагаем, что при выборе из этих комбинаций не происходит «фокализации», о которой будет речь ниже).

Рассмотрим теперь случай монополии слова. Монополист в своем сообщении мог бы назвать одну из комбинаций, названных выше «наилучшими для всех». Но, по нашему предположению, всякий игрок ценит только свой выигрыш. Поэтому монополист не упустит случая выиграть побольше, даже если другие при этом выиграют поменьше. Будем называть *проектом* всякое сообщение, называющее определенное множество π игроков и определенное действие для каждого игрока, входящего в π. Будем рассматривать только случаи, когда монополист входит в π. Предположим, что существует проект, удовлетворяющий следующему условию:

будучи исполнен, проект гарантирует каждому из его участников (то есть, входящих в π) выигрыш, больший, чем его выигрыш в некооперативном случае, и больший, чем он получит, если все участники проекта откажутся его исполнять, а в остальном будут действовать несогласованно. (6)

Основное утверждение работы состоит в следующем.

Если будет объявлен проект, удовлетворяющий условию (6), то он будет исполнен при сделанных предположениях 1, 2, 3б об игроках. (7)

Разумеется, монополист объявляет в своем сообщении тот из этих проектов, который дает ему максимальный выигрыш. Сделаем несколько важных замечаний.

I. Очевидно, что в своем сообщении монополист никого не обманывает, да и не мог бы обмануть, так как никто бы ему не поверил. Исполнение игроками его проекта не есть ни исполнение приказа, основанное на дисциплине, ни рекомендации — на авторитете, ни просьбы — на сочувствии, ни призыва — на принципе. Можно представлять себе, что все игроки считают монополиста лживым и ничтожным, и это не лишает его власти.

II. С другой стороны, важно то, что по условию игры сообщение монополиста делается известно всем игрокам, и что все знают об этом условии. Действительно, если бы игрок, получивший сообщение, мог думать, что его соседи получили какое-то другое сообщение (или не получили никакого), рассуждение в § 6 не прошло бы.

III. Очень важно также, чтобы сообщение монополиста не включало ничего, кроме нужного ему проекта. Какие-либо разъяснения или рассуждения с его стороны могут сделать неверным наше утверждение (7). Например, было бы грубой ошибкой со стороны монополиста добавить призыв не исполнять какого-то другого конкретного проекта. Игрок — участник проекта — исполняет его не потому, что этот проект наилучший в смысле чьего-то выигрыша, а потому, что этот проект единственный в своем роде, особенный для всех игроков. Проект стал особенным от того и только от того, что он и только он указан в сообщении. Таким образом, следование этому проекту есть *выбор особенного с целью скоординировать действия*. Это явление введено в научный обиход в [2] и названо *фокализацией*. Механизм выбора действия, который мы опишем в § 6, есть частный случай рефлексивного объяснения фокализации и аналогичен, в основной своей части, рассуждению в [5, с. 39].

IV. Успех игрока в игре часто связывают со знанием того, какие действия выберут другие игроки. В данном случае монополист обретает такое знание не обычным путем получения сообщения, а путем посылки сообщения. Таким образом, монополист проводит *рефлексивное управление* другими игроками в смысле [5].

§ 4. ПЕРВЫЙ ПРИМЕР

В §§ 4, 5 мы приведем два конкретных примера игр, в которых монополия слова приносит выгоду. При отсутствии таких примеров можно было бы еще думать, что сочетание условий, необходимых для этого невозможно. Первый пример — один из самых простых.

Пусть в игре участвует 10 игроков. Каждый может совершить одно из двух действий: 1 или 2. Если сумма действий (точнее их номеров) равна 11, то каждый получает выигрыш, равный номеру своего действия: 1 или 2. Если сумма действий не равна 11, то все получают выигрыш, равный нулю. Матрица игры описана. Очевидно, игроки получают ненулевой выигрыш если и только если ровно один из них совершит действие 2. Разберем три случая.

Кооперативный случай. Игроки могут бросить жребий: кому из них делать действие 2, заранее условившись, что те, кому не выпадет жребий, выберут действие 1. Тогда математическое ожидание выигрыша каждого равно $\frac{11}{10}$. (Поскольку кооперативный случай здесь понимается как не допускающий обязывающих соглашений, приходится предположить, что игроки не пререкаются после того, как жребий брошен, подобно Паниковскому [7, гл. 2]. Впрочем, в любом случае средний выигрыш не может быть больше, чем $\frac{11}{10}$).

Некооперативный случай*. Игроки действуют независимо, поэтому можно рассматривать их поведение по отдельности. Рассмотрим поведение игрока X_i.

а) Пусть для X_i выполняется условие 3а (тождество (4)). Тогда игрок X_i должен, не колеблясь, выбирать действие 2. Действительно, по его представлению, все остальные игроки знают, что он выбирает 2, и поэтому выбирают по 1, и тогда X_i получает выигрыш 2 — максимально возможный. Как видим, условие 3а, в играх двух лиц с постоянной суммой диктующее «осторожное поведение», здесь порождает «нахальство».

б) Пусть для X_i выполняется условие 3б (тождество (5)). Если игрок X_i решит выбрать 1, то и все, в его представлении выберут 1, и он выиграет ноль. То же будет, если он решит выбрать 2. Тогда игрок X_i решает выбрать 1 с вероятностью $1-p$ и выбрать 2 с вероятностью p. Все, в его представлении, поступают так же. Игрок X_i пишет формулу математического ожидания своего выигрыша:

$$11p(1-p)^9$$

и вычисляет, что его максимум достигается при $p=\frac{1}{10}$ (и равен приблизительно 0,426). Наконец, игрок X_i решает выбрать 1 с вероятностью $\frac{9}{10}$ и выбрать 2 с вероятностью $\frac{1}{10}$.

Замечание 1. В играх двух лиц с постоянной суммой смешанная стратегия применяется, чтобы не дать противнику угадать свой выбор. Здесь смешанная стратегия применяется с противоположной целью: чтобы сделать ненулевой вероятность согласованных действий. Поэтому, в частности, максиминная процедура вычислений здесь была бы совершенно неуместна.

---

* Предполагаем, что знаковый способ предъявления игры (нумерация игроков и действий и т. п.) в обоих примерах не дает возможностей для фокализации.

Замечание 2. Сравнение случаев а) и б) показывает, что предположений 1 и 2 об игроках заведомо недостаточно, чтобы однозначно определить их действия.

Случай монополии слова. Пусть игрок X_1 — монополист. Конечно, он сообщает: «я выбираю 2, а вы все выбираете 1» и в результате получает выигрыш 2. В силу предположения 1 об игроках, никакое самолюбие или стремление к справедливости им не свойственны. Они выбирают 1, так как, исполняя проект, они получают больше, чем если бы все действовали несогласованно, и больше, чем если бы все его нарушили.

§ 5. ВТОРОЙ ПРИМЕР

В этом примере выигрыш каждого игрока зависит от действий лишь небольшого числа других игроков — его «соседей». Это облегчает труд монополиста, так как в этом случае он может составить множество π только из себя, небольшого числа своих соседей, соседей своих соседей и т. п. Если бы выигрыш монополиста существенно зависел от действий всех игроков (как в первом примере), ему пришлось бы всем им «придумать занятие», чтобы непредвиденными действиями они не испортили его выигрыша.

В игре участвуют N^2 игроков. Удобно сопоставить каждому игроку клеточку в квадратной таблице $N \times N$ клеток (см. рис. 1, 2, где $N=10$). Два игрока считаются соседями друг друга, если их клетки имеют общую сторону или вершину. Чтобы матрица игры была однород-

1	2	3	4	5	1		5		
2	3	4	5	1		5	4	5	
3	4	5	1		5	4	3	4	5
4	5	1		5	4	3	2	3	4
5	1		5	4	3	2	1	2	3
			1	5	4	3	2	3	4
2	3	1		1	5	4	3	4	5
1	4	5	3		1	5	4	5	1
2	3	1	2	5		1	5	1	
1	4	5	3	4	2		1		

Рис. 1

на, предполагаем, что таблица склеена в тор, то есть верхняя сторона квадрата склеена с нижней, а левая сторона — с правой. Поэтому у каждого игрока ровно восемь соседей. Выигрыш каждого игрока определяется действиями его и восьми его соседей. Каждый игрок может совершить одно из m действий, которые обозна-

					2	1	2		
				4	3	2	3	4	
3	5	4	1	5	4		4	5	1
2	1	3	2	1				1	2
4			3	4				4	3
3			1	5				5	1
	3	4	2	3				3	2
1	2	5	1	4	5		5	4	1
5	4	1	5	2	1		1	2	5
	3	2	4	3				3	4

Рис. 2

чаются целыми числами от 1 до m. Предполагаем, что $m \geqslant 5$ и что N делится на m. (В примерах, показанных на рис. 1, 2, считаем, что $m=5$). Опишем, как зависит выигрыш игрока от этих действий.

Назовем *уголком*, выходящим из клетки i, упорядоченную тройку клеток (i, j, k) для которой выполняются следующие два условия:

1) клетка j имеет общие стороны с клетками i и k;

2) клетки i и k имеют общую вершину.

Легко подсчитать, что из каждой клетки выходит ровно восемь уголков. Скажем, что уголок (i, j, k) правильно заполнен, если

$$A_j - A_i \equiv A_k - A_j \equiv 1 \pmod m,$$

где A_i, A_j, A_k — действия игроков X_i, X_j, X_k, занимающих клетки i, j, k соответственно. *Выигрыш игрока X_i равен числу правильно заполненных уголков, выходящих из клетки i.* Матрица игры задана. Очевидно, выигрыш каждого игрока может принимать лишь целые значения от 0 до 8 включительно.

Оказывается, сумма выигрышей всех игроков в этой игре не может превысить $2N^2$. Докажем это. Очевидно, сумма выигрышей равна общему числу правильно заполненных уголков. Общее число уголков равно $8N^2$. Разобъем все уголки на N^2 групп по 8 штук в каждой. В одну группу отнесем те 8 уголков, которые помещаются в один квадрат размером 2×2 клетки. Перебором легко установить, что при $m\geqslant5$ в каждой группе могут быть правильно заполнены не более, чем два уголка. Тогда во всех группах может быть не более, чем $2N^2$ правильно заполненных уголков, что и требовалось.

В то же время существуют комбинации действий всех игроков, при которых все выигрывают по два очка. Простейшие из них получаются расстановкой на одной диагонали единиц, на соседней — двоек и т. д. (это показано на рис. 1 в левом верхнем углу для $m=5$). Таких простейших комбинаций $4m$ штук. Есть и более сложные комбинации, но их мы не будем рассматривать (одна из них показана на рис. 1 в левом нижнем углу для $m=5$). Перейдем теперь к анализу игр с этой матрицей.

Кооперативный случай. Разумеется, игроки договорятся разыграть одну из комбинаций, дающих всем по два очка, так как при этом сумма их выигрышей принимает максимальное возможное значение $2N^2$. Даже Паниковский не стал бы оспаривать такой договор.

Некооперативный случай. Очевидно, все $4m$ комбинации аналогичных изображенной на рис. 1, слева вверху, равноправны, среди них нет особенной. Поэтому фокализация невозможна. Поэтому действия игроков можно рассматривать как случайные, точнее как выбор всех действий с равными вероятностями и независимо от действий других игроков. Тогда для каждого уголка вероятность того, что он будет правильно заполнен, равна $\frac{1}{m^2}$. Тогда математическое ожидание выигрыша каждого игрока равно $\frac{8}{m^2}$. При $m\geqslant5$ оно меньше одной трети.

Случай монополии слова. Пусть игрок X_1 — монополист. Согласно предположению 1 об игроках, X_1 стремится выиграть возможно больше. Максимальный возможный выигрыш здесь равен восьми. Комбинация действий X_1 и его соседей, обеспечивающая ему такой выигрыш, показана на рис. 1 справа (в клетке монополиста стоит единица, обведенная зубчатой каймой), но, чтобы соседи X_1 совершили эти действия, надо и им посулить достаточно большой выигрыш. Для этого надо их соседям тоже приписать определенные действия, и так далее. Получается проект такого вида, как показано на рис. 1 справа. Но, как много игроков ни включал бы такой проект, в нем есть крайние игроки, выигрыш которых, очевидно, ничуть не больше, чем в некооперативном случае. С этим можно справиться, составив проект, все участники которого выигрывают не менее одного очка. На рис. 2 показана часть одного из таких проектов для $m=5$. Этот проект возможен при $N \geqslant 20$. Он состоит из восьми «колоний» (одна из них показана на рис. 2 слева внизу), соединенных «дорогами» с «метрополией», окружающей монополиста (часть ее показана на рис. 2 справа вверху). Однако уже простой проект, показанный на рис. 1 справа (но продолженный на достаточное расстояние от монополиста), интуитивно представляется довольно эффективным. Ниже мы попытаемся объяснить, почему это так.

§ 6. МЕХАНИЗМ ВЫБОРА

Выше мы указали ряд условий, существенных для того, чтобы утверждение (7) было верно. В этом параграфе мы опишем ход размышлений игрока, приводящий его к решению исполнить объявленный проект. Это описание покажет, какую роль играют названные выше условия.

Итак, пусть монополист объявил свое сообщение. Пусть игрок X_i входит в множество π. Игрок X_i получил сообщение и выбирает, какое ему совершить действие. Перед ним встает вопрос: как использовать объявленный проект. Три наиболее естественных способа таковы:

а) игнорировать проект, то есть выбирать действие так, как будто ничего не было объявлено;

б) исполнить объявленный проект;

в) не исполнять его, то есть исключить из своих действий то, которое приписано ему в проекте, и исполнять какое-то из остальных действий.

Конечно, игрок X_i может вообразить и целый ряд других способов, например: г) совершить действие с номером на единицу большим, чем номер действия, приписанного ему в проекте, и т. п. Но все эти способы, ничиная с г), менее естественные, и мы предположим, что игрок X_i их не рассматривает. Итак, пусть игрок X_i выбирает между способами а), б), в). Тогда, по условию 3б (тождество 5), в представлении X_i каждый участник проекта выбирает между этими тремя способами в применении к себе. Более того, когда X_i произвольно (то есть, без всяких на то оснований) полагает, что он выберет способ а), тогда и все другие, в его представлении, выбирают способ а) (имея на это такие же, то есть, никакие, основания). Создающееся при этом положение равносильно некооперативному случаю.

Когда игрок X_i предполагает, что он выберет способ б), тогда и все остальные игроки, входящие в π, в его представлении выбирают способ б). Значит, в представлении X_i объявленный проект исполняется.

Когда игрок X_i предполагает, что он выберет способ в), тогда и все, входящие в π, в его представлении, выбирают способ в), то есть все отказываются исполнять проект.

По условию, второй из этих трех случаев дает наибольший выигрыш игроку X_i. Предположим сначала, что игрок X_i закончит на этом размышлять. Тогда X_i окончательно решит выбрать способ б), то есть исполнить проект. Приведенное рассуждение построено в неявном предположении, что в X_i не происходит актов рефлексивного осознания (в смысле [5]).

Заметим, что это рассуждение проходит и в том случае, когда условие (6) не выполняется, а выполняется следующее более слабое условие:

Исполнение проекта всеми его участниками гарантирует выигрыш больший, чем когда все игнорируют проект или когда все его нарушают, не всем его участникам, а лишь некоторым, составляющим множество $\pi' \subset \pi$, причем X_i входит в π'.

Например, для проекта, показанного на рис. 1 справа, множество π' состоит из всех его внутренних участников. Однако при условии (8) решение исполнить проект интуитивно воспринимается как менее надежное, чем при условии (6). В самом деле, с какой стати крайним участникам исполнять проект? А если их соседи осознают это, то и им нет смысла исполнять проект, и т. д.

Допустим теперь, что в игроке X_i происходят акты рефлексивного осознания. Пусть игрок X_i, закончив приведенное выше рассуждение, осознает, что он его провел (не приняв еще окончательного решения о выборе действия). Тогда, по условию 3б) (тождество 5), в X_i возникает представление, что все остальные участники проекта (в предположении (6)) тоже провели аналогичное рассуждение. Таким образом, мнение X_i о том, что все выберут случай б), подтверждается. Подтверждается оно и при всех дальнейших актах осознания в игроке X_i. Произвольно оборвав в какой-то момент цепочку актов осознания, игрок X_i окончательно решает исполнить проект. Свойство проекта подтверждаться при любом числе актов осознания, происходящих в его участниках, можно назвать его *устойчивостью* (как в [8]). Таким образом, при условии (6) проект монополиста устойчив. В этом случае выбор игрока X_i, входящего в π, определен однозначно (при наших предположениях), хотя не определено число актов осознания, происходящих в ходе его размышления. Это число произвольно, и обрыв цепочки актов осознания не может иметь никаких оснований.

Теперь понятно, в каком смысле эффективен проект, изображенный на рис. 1 справа, не доставляющий выгод крайним его участникам, и потому неустойчивый. Действительно, пусть X_i — сосед монополиста. Тогда для X_i решение исполнить проект подтверждается, пока число актов его осознания меньше, чем расстояние от X_i до края комбинации на рис. 1 справа. Если это расстояние велико, то, возможно, X_i оборвет цепочку своих осознаний раньше, чем будет нарушено его решение исполнить проект*.

---

* Возможно, психика реального человека допускает акт мышления, эквивалентный в каком-то смысле бесконечному числу актов осознания, напоминая Ахиллеса, все же догоняющего черепаху (ср. [5, с. 26]). Но мы такую возможность не рассматриваем. На практике такая возможность также часто не реализуется. В качестве аналога неустойчивого проекта укажем на особый способ сбыта товаров, описанный в [9, § 61, «Лавина дешевых велосипедов»]. Магазин продавал велосипед, стоящий 50 р, за 10 р, давая «в нагрузку» четыре билета по 10 р. Билеты надо было продать своим знакомым, получившим при этом право на аналогичную операцию. В результате более ранние покупатели выгадывали за счет более поздних, которым некому было сбыть свои билеты. При неограниченном числе актов осознания никто не купил бы ни одного велосипеда. Однако афера пользовалась успехом.

§ 7. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. В описании механизма выбора в § 6 мы использовали тождество (5) в довольно сильном смысле. Для некоторых конкретных игр удается построить рассуждение, приводящее к исполнению проекта, предполагая лишь следующее: «игрок X_i считает, что все, как и он, рассматривают способы *а*, *б*, *в*» и не исключая из поля зрения X_i случаи, когда одни произвольно выбирают способ *а*, другие — *б*, третьи — *в*. Неясно, однако, при каких общих условиях проходит такое рассуждение. По-видимому, эти условия должны быть похожими на определение точки Нэша, но более сильными.

2. Можно строить рассуждение, приводящее к исполнению проекта, заменив условие 3б на то или иное усиление условия 3а. Например, годится условие, состоящее из двух тождеств: (4) и (9):

$$X_k X_k X_i \equiv X_j X_k X_i \qquad (9)$$

при всех $j \neq i$, $k \neq i$, $j \neq k$.

3. Основное утверждение (7) сохраняет силу и в том случае, если игра проводится многократно, но не слишком много раз подряд. Говоря точнее, игра может повторяться столько раз, чтобы за это время была достаточно мала вероятность случайным поиском игроков найти комбинацию, дающую всем максимально возможный равный выигрыш. Тогда игрокам выгоднее раз за разом исполнять объявленный проект, чем искать «наилучшую для всех» комбинацию. Монополист даже не должен при этом повторять свое сообщение: достаточно огласить его один раз в начале игры.

4. В данной статье рассматриваются лишь случаи, когда монополист указывает игрокам (входящим в π), какие конкретно действия им делать. Пользуясь термином теории коммуникации можно сказать, что сообщение монополиста носит откровенно «манипуляторный» характер. Интересно было бы построить примеры, когда монополист получал бы большой выигрыш, не указывая точно нужные ему действия игроков, а лишь посылая им краткое сообщение типа «группируйтесь вокруг меня» и т. п. Возможно, для этого годятся уже приведенные в §§ 5, 6 матрицы игр, но процедура выбора действия игроком при этом, вообще говоря, усложняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М., «Наука», 1970.
2. Schelling T. The Strategy of Conflict. Cambridge (Mass.) 1960.
3. Беглов С. И. Монополии слова. М., «Мысль», 1972.
4. Цетлин М. Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М., «Наука», 1969.
5. Лефевр В. А. Конфликтующие структуры. М., «Сов. радио», 1973.
6. Лефевр В. А. Формальный метод исследования рефлексивных процессов. «Вопросы философии», 1971, № 9, с. 103—115.
7. Ильф И., Петров Е. Золотой теленок. М., «Худож. лит.», 1971.
8. Тоом А. Л. Способы принятия решения в одном классе игр. — «Техническая кибернетика», 1973, № 3, с. 16—21.
9. Перельман Я. И. Живая математика. М., «Наука», 1974.