

Ensino¹

O efeito dominó

André Toom

Sou matemático russo com experiência internacional em pesquisa e ensino. Ensinei bastante na Rússia e nos EUA, onde participei de vários projetos educacionais. Passei os últimos anos no Brasil, dando vários cursos. Através destas experiências, posso descrever um fenômeno negativo que existe no ensino da matemática em vários países. Denominarei este fenômeno de “efeito dominó”.

O que é o efeito dominó? Se você colocar várias peças de dominó na mesa, pode fazer cair todas derrubando só uma. Na educação este fenômeno se mostra em várias versões. Versão grave: em cada curso vários alunos sentem dificuldades pois trazem lacunas de disciplinas anteriores, portanto vão ter dificuldades nas disciplinas seguintes. Versão suave: o ensino de cada disciplina é trivializado pois disciplinas anteriores foram trivializadas, portanto os cursos seguintes também o serão.

É possível um professor sozinho parar o fenômeno dominó? Parar, não. Só suavizar. Imagine que você começa ensinar em um curso e descobre que seus alunos não estão preparados. O que você pode fazer? Acho que é necessário começar a disciplina com uma revisão dos assuntos que os alunos são supostos saber mas de fato não sabem. Infelizmente, esta revisão pode demorar tanto que faltará tempo para ensinar o conteúdo do seu próprio curso. Conseqüência: Alunos capazes não são desafiados como precisam para tornarem-se especialistas de alto nível. Quando assistem a um curso novo esperam estudar assuntos novos, mas, ao invés disto, têm que assistir a revisões que não precisam. Quando

¹Seção coordenada por Walcy Santos

o professor afinal passa a cobrir assuntos novos, já não há tempo para elaborá-los. Alunos fracos aprendem um pouco aqui, um pouco ali, mas sempre às pressas, e portanto ficam sempre confusos. A sociedade passa a não poder acreditar em diplomas, pois não sabe se recebe especialistas competentes ou não.

O fenômeno dominó pode acontecer em várias disciplinas, mas é mais nefasto no ensino da matemática onde a ordem é importantíssima. No ensino da geografia, a Ásia pode vir antes ou após a América, mas na matemática álgebra não pode vir antes da aritmética. Mesmo assim, para estudar álgebra não é suficiente fazer operações de aritmética, é necessário também resolver problemas de aritmética. Para estudar cálculo é necessário saber toda matemática escolar incluindo álgebra, geometria e resolver bastante problemas. Para estudar estatística é necessário saber probabilidade de variáveis contínuas, a qual é baseada em cálculo, e resolver problemas de cálculo de probabilidade, alguns dos quais são bastante complicados. Toda matemática é uma escala (ou sistema de várias escalas) onde subir só é possível passo a passo, consolidando-se em cada patamar o conhecimento adquirido. Cada passo não significa apenas memorizar, mas entender, pensar e resolver problemas.

Exemplo brasileiro (versão suave): Quando ensinei uma disciplina de processos estocásticos, comecei verificando se os alunos sabiam a teoria de matrizes. Descobri que não sabiam nada. Em seguida, verifiquei se eles sabiam a teoria dos números complexos; por exemplo, se podiam resolver a equação $z^3 = 1$. Não podiam. Portanto comecei o curso com números complexos e com apresentação geométrica e solução geométrica das equações. Em seguida, ensinei matrizes e como achar auto-valores e auto-vetores e só no meio do semestre comecei a ensinar cadeias de Markov.

Exemplo americano (versão suave): várias vezes ensinei álgebra abstrata numa universidade. Na primeira vez, ensinei os seguintes tópicos clássicos: grupos, anéis, corpos. Os alunos foram corteses, mas indiferentes. Pensei nisto e entendi que antes de falar sobre estas abstrações é necessário estudar algumas álgebras particulares. No outro ano comecei com a teoria dos números complexos, com interpretação geométrica e resolução de equações cúbicas. Os alunos ficaram mais interessados. Mas isto não foi álgebra abstrata, foi uma preparação para ela.

A versão grave acontece quando o professor não entende que os alunos não estão preparados. É comum exemplos tristes como este. Uma aluna americana, orientada por mim e muito aplicada nas minhas aulas, fez um curso de geometria moderna com outro professor e lamentou-se para mim queixou-se pois todos alunos que fizeram este curso não entenderam nada. O professor era um matemático ótimo e um homem simpático, mas pedante. Ele foi inflexível em seu dever de ensinar exatamente o que pedia a ementa: geometria moderna, i.e. não-euclidiana. O que este estrangeiro não percebeu foi que todos os seus alunos não tinham idéia nenhuma de geometria euclidiana como sistema lógico, como acontece com alunos americanos. (Se não provamos teoremas na vida cotidiana, não há razão em prová-los na escola.)

Se eu desse este curso, ensinaria primeiro geometria euclidiana, apresentando os axiomas e provando teoremas, explicaria as aspirações de Euclides de supor tão pouco quanto possível (também as aspirações dos cientistas modernos). Em seguida passaria ao famoso quinto postulado e às várias tentativas de deduzí-lo a partir dos outros por contradição, ou seja, supor todos os axiomas e postulados euclidianos com uma só exceção: supor que o quinto postulado é falso, obter várias conclusões e enfim obter uma contradição. Eu diria que todas estas tentativas fracassaram, que ninguém conseguiu obter uma contradição. Rua sem saída? Exatamente o oposto! Uma das maiores descobertas em toda história da matemática foi reinterpretar este "fracasso" de obter uma contradição como sucesso - um desenvolvimento lógico de outra geometria, não-euclidiana, onde o quinto postulado é falso. Acho que esta aventura de idéias é muito interessante. Eu já a conhecia desde a escola. Toda as vezes que ensinei história da matemática, expliquei este assunto e os alunos sempre se interessaram.

A situação torna-se de fato mais difícil quando temos alunos fortes e fracos numa turma. Neste semestre estou ensinando estatística para futuros engenheiros. O resultado da primeira prova: uma variedade enorme de notas, distribuídas quase uniformemente na escala de zero até o máximo. Isto significa que nas minhas aulas estão sentados, um próximo do outro, alunos que sabem muito e precisam de um curso mais avançado e alunos mal preparados que precisam de um curso mais básico, com programa escolar. Alguns alunos acham que eu deveria provar mais, outros discutem cada nota pois estão no limiar da reprovação. Mas eu

não posso satisfazer a todos. Eu procuro dirigir-me à maioria dos alunos, mas não sei se a maioria realmente me entende. Em cada aula faço perguntas e convido a todos a vir à louza escrever a resposta, fazer uma transformação algébrica, preencher uma tabela ou desenhar um gráfico, mas só uma pequena parte dos alunos estão dispostos a vir ao quadro negro, normalmente os mais preparados. A maioria tem medo de errar e com razão: seus conhecimentos de álgebra e de desenho deixam muito a desejar.

Notei que todos os alunos que são reprovados em meus cursos foram também reprovados em cursos anteriores a estes, mesmo na escola. Incluí numa prova uma tarefa de escrever as fórmulas e desenhar os gráficos da função acumulada e da função de densidade de uma variável aleatória. Em algumas provas, gráficos e fórmulas estavam em contradição ou a função de densidade era negativa ou não era a derivada da função acumulada. Isto é mais que um erro básico de probabilidade; é um erro do ensino médio ou dos primeiros cursos universitários. Outra vez, incluí numa prova o estudo de uma variável aleatória bidimensional distribuída uniformemente num triângulo:

$$\{(x, y) : x \leq 1, y \geq -1, y \leq x\}.$$

Pedi para desenharem este triângulo no plano Oxy como introdução fácil, mas, na realidade, não foi fácil. Só uma minoria de alunos acertou.

É impossível discutir o ensino na universidade sem falar do ensino médio. Nós dependemos muito da escola, mesmo a nível de pós-graduação. A escola pode e deve incluir assuntos teóricos. Assim ocorre em vários países, incluindo a Rússia. Mas alguns educadores americanos têm uma idéia oposta: insistem que os jovens só têm interesse por coisas que podem aplicar na vida cotidiana. O resultado é a falta dramática de preparação no desenvolvimento do intelecto, sem o qual é impossível estudar em uma universidade.

Nas últimas décadas o Brasil, como vários outros países, consideram os EUA como um exemplo a seguir. Isto pode fazer sentido em várias áreas, mas o ensino da matemática é ruim nos EUA. Talvez a razão principal seja a má preparação dos professores da escola americana, a qual anda nas bocas do mundo.² A educação americana tem várias distorções

²Recentemente Liping Ma mostrou no seu livro "Knowing and teaching elementary

que são descritas em vários livros.³ Vou concentrar-me em uma só: o menosprezo pelo caráter estrutural da matemática. Os Estados Unidos são o único país sem currículo nacional de ensino de matemática. O resultado típico é que alunos são mal orientados e freqüentam cursos avançados sem preparação. Vários educadores americanos têm orgulho deste fato. Quando ensinei cálculo numa universidade americana, descobri que a metade dos meus alunos pulou um ou dois cursos anteriores por orientação de seus tutores. A maioria destes alunos foram reprovados no meu curso.

Que bons exemplos pode o Brasil seguir? TIMSS,⁴ a mais prestigiosa pesquisa internacional sobre a qualidade do ensino de matemática e ciência, oferecem os melhores cursos de matemática no ensino médio vários países asiáticos (Singapura, Korea, Japão) e que o ensino em vários países europeus, incluindo a Rússia, também é bom. Vou falar sobre educação na Rússia pois conheço ela de perto. Acho que tudo que eu escrevo sobre Rússia é parecido com o que ocorre em vários países onde a educação de matemática é boa. Segundo todas minhas observações, o entendimento do caráter estrutural da matemática é um fator muito importante na qualidade do ensino em todos os países. Quase todos os alunos russos não têm aula de cálculo na escola, porém quando chegam à universidade estão prontos para entendê-lo porque sabem álgebra e geometria muito bem. A percentagem dos alunos americanos que aprendem cálculo na escola é altíssima, mas foram mal preparados pois na maioria deles tiveram uma preparação ruim, sem resolver problemas de álgebra e geometria. Segundo minhas observações, como professor universitário, ensinar a alunos americanos que aprendiam cálculo na escola é mais difícil que a outros estudantes, porque estes alunos desenvolvem um pouco de assuntos rotineiros e acham que é cálculo. Uma tarefa fácil, é inexequível para eles, como por exemplo, calcular

$$\int_{-1}^1 |x| dx \quad \text{ou} \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{ou}$$

mathematics", 1999, que professores americanos do primeiro grau não sabem tão bem matemática como alunos chineses da 9a série.

³Um ótimo livro é o de Diane Ravitch, "Left Back: A Century of Failed School Reforms", 2000.

⁴Pode-se encontrar uma referência para TIMSS no meu artigo "Observações de um matemático sobre o ensino de matemática" publicado em *Revista do Professor de Matemática*, v. 44, 2000, pp. 3-9.

$$\int \int_{x^2+y^2 \leq 1} 1 \, dx \, dy \quad \text{ou} \quad \int \int_{|x|+|y| \leq 1} x \, dx \, dy.$$

Por que tantos alunos americanos têm aula de cálculo na escola? Acho que a primeira razão é a pobreza de conteúdo dos cursos elementares. Vários professores do ensino médio nos EUA têm uma idéia muito rasteira da matemática elementar. Minha filha sempre foi interessada em artes, mais do que em ciência, mas, quando mudou da Rússia para a América e começou a estudar em escolas americanas, foi surpreendida pela pobreza de conteúdo de matemática em comparação às escolas russas. Nelas, os alunos resolvem problemas com vários passos já na 4ª série. Nas escolas americanas mesmo na 6ª série os alunos ainda resolvem problemas com apenas um passo. Não é de se admirar que quase tão logo um aluno americano torna-se capaz de realizar operações básicas de aritmética e álgebra, os burocratas não tenham nada a oferecer além de cálculo. E na maioria dos casos este cálculo não é realmente cálculo.⁵ A maioria dos professores da escola é mal preparada a ensinar, mesmo tópicos básicos. Contudo, durante vários anos, ao invés de reconhecer a necessidade de entender melhor os tópicos básicos e saber resolver mais problemas, vários líderes da educação americana viraram a cabeça dos professores da escola com projetos fantásticos como, por exemplo, comparar várias geometrias (sem provar teoremas), ensinar fractais (sem nenhuma definição), ou ensinar métodos de estatística como qui-quadrado e *t* de Student (sem mesmo mencionar variáveis aleatórias contínuas).⁶ Educadores americanos chamam este fenômeno “milha de largura, polegada de profundidade” e consideram-no um defeito muito sério. Nunca ouvi esta frase no Brasil, é uma pena pois o mesmo fenômeno acontece neste país.

Enquanto se exige da escola fazer o impossível, ela não consegue fazer o que é possível. Em muitas universidades americanas já existem

⁵Mesmo cálculo nas universidades americanas nem sempre é cálculo. Lembro-me de uma aluna que foi aprovada em cálculo 1, 2 e 3, mas não podia desenhar o gráfico de $x = -1$. O mesmo problema existe em outras ciências exatas. Lembro-me de outra aluna que foi aprovada no curso de física atômica mas não podia desenhar o gráfico de função $y = x^2$.

⁶Pode-se achar todas estas propostas no livro “Curriculum and evaluation standards for school mathematics”, NCTM, 1989, pp. 157, 169. Como é típico dos fogos artificiais, a vida destes foi curta. Na publicação nova “Principles and Standards for School Mathematics”, NCTM, 2000, todas estas propostas são eliminadas às escondidas, sem atrair atenção.

programas amplos com conteúdo escolar. Esta prática começou como emergência, mas estabeleceu-se e cresce todo o tempo. Recentemente Jim Milgram, professor de matemática da Universidade de Stanford, declarou numa conferência educativa: “Desde 1989 a percentagem de alunos novos no sistema da Universidade Estadual da Califórnia - o maior sistema estadual no país - à qual foi exigido a fazer cursos correcionais em matemática aumentou quase 2 1/2 vezes de 23% em 1989 até 55% hoje.”⁷ Existe um provérbio que diz: “As universidades americanas são as mais caras escolas do mundo”. É realmente caro pagar salário universitário para ensinar conteúdos escolares. Precisamos da mesma coisa no Brasil? Acho que é mais econômico pagar mais para professores da escola, mas obrigando-os a cumprir seu dever.⁸ Entretanto, o dever da escola deve ser definido justa e realmente. Nós não devemos encarregar escolas ou cursinhos dos nossos próprios deveres. Geralmente, cálculo e álgebra linear não podem ser ensinados na escola. Como explicar o que é o limite de uma função quando x tende para zero sem epsilon e delta? Dizer que esta função vai muito, muito perto deste número quando x é muito, muito pequeno e deixar por isso mesmo? E quem tem razão no caso de divergência de opiniões? A função $\sin(1/x)$ chega muito perto de 1 quando x é muito pequeno ou não? Ninguém sabe com certeza pois a pergunta não é rigorosa.

O que as escolas devem ensinar? Em duas palavras: álgebra e geometria. Estas duas disciplinas são fundamentais, são bastante ricas de conteúdo e têm problemas que podem entusiasmar um cientista futuro.⁹

⁷Para ler o testemunho de Milgram, ver http://www.house.gov/ed_work_force/whatsnew.htm e tecla “Joint hearing on The Federal Role in K-12 Mathematics Reform”.

⁸Recentemente li um artigo com nome pomposo “Balanço é positivo”, Jornal do Brasil, 17 de outubro de 2000, p. 3, sobre salários dos professores de escolas. O artigo diz: “De dezembro de 1997 a junho de 2000, a remuneração dos professores com curso fundamental completo subiu de R\$ 165 para R\$ 324. Os que têm curso de magistério completo conseguiram ganhos maiores, com salários que foram elevados de R\$ 288 para R\$ 504. Para os que têm o ensino fundamental incompleto, o salário aumentou de R\$ 177 para R\$ 295.” O governo tem orgulho que os salários cresçam, mas contudo acho que todos estes salários ainda são catastróficamente pequenos. Acho que eles devem crescer ainda pelo menos duas vezes.

⁹Um exemplo: em entrevista com o matemático famoso Vladimir Arnold em “Notices of the AMS”, v. 44, n. 3, pp. 432-438. Arnold lembra o seguinte problema: “Duas pessoas começaram andar ao nascer do sol e andam com velocidades constantes. Uma pessoa andou de A para B, outra de B para A. Encontraram-se ao meia-dia

Muitos matemáticos russos começaram a interessar-se por matemática por causa destes problemas de álgebra e geometria escolar. Os livros escolares russos são cheios de problemas interessantes.

Como a escola pode realmente ajudar a universidade? É ensinando aos alunos a resolver problemas e também ensinando a provar de maneira rigorosa, que é a essência da matemática. Seguindo a teoria de Piaget, a maioria das crianças atinge o estágio das "operações formais", que é o último estágio na sua teoria, por volta dos 10-14 anos. Esta idade é a mais oportuna para começar a ensinar provas. A prática de educação na Rússia e vários outros países usa esta possibilidade. Quando estudei na escola russa, nosso curso de geometria incluiu provas de vários teoremas. Parece que no Brasil esta possibilidade natural é pouco usada: mesmo escolas privadas e caras não mostram a matemática como uma ciência dedutiva. Mesmo os primeiros cursos das universidades não ensinam provas. O curso típico de cálculo é no nível intuitivo. Já dei aulas a alunos de pós-graduação no Brasil e observei que para alguns deles "provar" é uma coisa nova e não costumeira.

Existem muitos tópicos rigorosos que podem ser ensinados na escola. Não posso apresentar uma lista completa, mas aqui estão alguns exemplos: 1) Geometria euclidiana com provas dos teoremas. É claro que na escola as provas não podem ser completamente rigorosas, mas mesmo assim são muito úteis. Por exemplo, as crianças de 12-16 anos de idade podem entender várias provas: do teorema de Pitágoras (há várias provas dela), segmentos proporcionais e relações entre ângulos e arcos num círculo e também que as três bissetrizes de um triângulo interceptam-se num ponto, analogamente para mediatrizes, alturas e medianas. 2) A teoria dos números, por exemplo: a) O conjunto dos números primos é infinito. Este argumento famoso já era conhecido por Euclides. b) Condições de divisibilidade: fáceis por 2, 5, 4, 8 e mais difíceis por 3, 9 e 11. O estudo de números inteiros fornece a possibilidade de ensinar aos alunos algoritmos, o que é uma ótima preparação para ciência da computação. 3) Definição dos números reais como frações decimais infinitas. Uma pergunta muito frutífera é se a fração decimal infinita $0,999\dots$ (uma série infinita de noves após a vírgula) é igual a

e, continuando sem parar, chegaram respectivamente para B às 4 horas da tarde e para A às 9 horas da tarde. A que horas o sol nasceu neste dia?" Arnold disse que passou todo o dia resolvendo este problema e chama isto de sua primeira experiência matemática real.

1 ou menor que 1, e se menor, quanto? A existência de números irracionais, por exemplo $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ e várias outras raízes. As provas de que os números racionais transformam-se em frações decimais periódicas e vice-versa. Também é necessário ensinar aos alunos a usar vários métodos de prova, incluindo a prova por contradição e o método da indução matemática.

Nós, professores universitários podemos influir nas escolas? Com certeza e mais ainda, não podemos nos omitir de influir. Não esqueçamos que a tarefa mais exigida das escolas do segundo grau é preparar alunos para o vestibular. Se uma escola privada não prepara para o vestibular, ela perde alunos e dinheiro. Então, colocando problemas no vestibular, nós inevitavelmente mandamos uma ordem para escolas: o que estudar. Influência não deve jamais separar-se de responsabilidade, e devemos sempre pensar sobre as conseqüências dos nossos vestibulares. Olhei livros com problemas de vestibular e encontrei muitos ouvintes, cujo lugar certo é na universidade: limites, derivadas, noções de integral, matrizes, determinantes. Isto é um erro. Se todos estes tópicos estão presentes mesmo no vestibular, por que os alunos universitários não sabem tudo isto? Porque a presença de limites, matrizes e outros tópicos avançados no vestibular é esnobismo inútil. Se olharmos os problemas em si, poderemos constatar que todos são exercícios superficiais. Os vestibulares menosprezam matemática elementar, onde há muitos problemas úteis e interessantes, e no lugar disto estão cheios de imitações vazias de matemática universitária. O resultado é que os alunos gastam tempo decorando material para o vestibular e entram na universidade sem entender os assuntos mais básicos de matemática elementar. É isto que eu observo nas disciplinas universitárias. Por exemplo, a maioria dos meus alunos brasileiros não consegue derivar as fórmulas das somas de progressões aritmética e geométrica. Recentemente, ensinando o coeficiente de correlação, perguntei a uma turma grande quando a função $y = ax^2 + bx + c$ é não-negativa para todos valores de x e ninguém respondeu. Tenho certeza que resolver problemas é necessário para cientistas e engenheiros futuros. O que seria a matemática sem a resolução de problemas?

Como evitar o efeito dominó? Sempre lembrar o caráter estrutural de matemática. Na matemática existem tópicos básicos sem os quais é impossível estudar. Na matemática escolar, álgebra e geometria, na

matemática universitária, cálculo e álgebra linear. Orientar alunos no trabalho sistemático, curso após curso, passo após passo. Abandonar fogos artificiais e esnobismo, a tendência de valorizar nomes mais que conteúdo. Excluir todos tópicos universitários (cálculo e álgebra linear) do vestibular e incluir mais problemas que obriguem os alunos a pensar e provar. Quando alunos novos aparecerem na universidade, antes de tudo, ensinar-lhes as duas disciplinas fundamentais: cálculo e álgebra linear. Fazer isto com definições, provas e com resolução de problemas.

Agradeço ao consultor cujo nome desconheço, à aluna de UFPE Andréa Rocha e ao professor Francisco Cribari por corrigir meus erros em português.

Departamento de Estatística
Universidade Federal de Pernambuco
Recife, PE, 50740-540, Brasil.

E-mail: toom@de.ufpe.br, toom@member.ams.org