André Toom
UFPE
E-mail toom@de.ufpe.br

Todos precisem pensar ou só matematicos?

Palestra no ERMAC 2007

Sou matemático da origem russa com doutorado da Universidade de Moscou. Tenho mais que cem publicações em matemática e ensino dela. Nos últimos cinco anos sou professor adjunto de departamento de estatística da UFPE. Na verdade sou matemático; sou no departamento de estatística pois a maioria dos meus trabalhos são na area de probabilidade e no Brasil probabilidade é classificada junto com estatística, fora de matemática.

É claro que minha contribuição em nosso departamento é contribuição dum matemático, no primeiro lugar cuidado de **rigorosidade de argumentos** na orientação e no ensino. Nestes anos orientei 3 alunos de doutorado, 6 alunos de mestrado e 7 alunos de iniciação científica. Esta experiencia é dificil para mim e mesmo mais para meus alunos pois eles têm que resolver dois problemas no mesmo tempo: resolver um problema concreto de matemática e entender o que significa resolver um problema matemática. Toda sua experiência anterior ajuda-los muito pouco.

Ensino também não é facil. Desde chegar para cá, ensinei cada ano uma disciplina de nível mestrado chamada *Metodos matemáticos para estatística*, o que de fato é *Analise matemática* cheia de definições e provas rigorosas com epsilon e delta. Esta materia é dificil para todos, mas eu observei que meus alunos são muito mal preparados: só no mestrado nossos alunos encontram na primeira vez na sua vida uma tarefa de **PROVAR** alguma coisa.

Uma vez pedi meus alunos desta disciplina cumprir uma prova especial, sem conseqüências para sua nota. Veja esta prova:

Prova Especial (UFPE, 1o semestre de 2003).

Problema 1. Provar que um número natural é múltiplo de 9 se e somente se a soma dos seus algarizmos (em notação decimal) é múltiplo de 9.

Problema 2. Para quaisqueres números naturais M e N provar que

$$mmc(M,\ N) \times mdc(M,\ N) = M \times N,$$

onde $mmc(M,\ N)$ é o menor múltiplo comum e $mdc(M,\ N)$ é o maior divisor comum deles.

Problema 3. Provar que o conjunto dos números primos é infinito.

Problema 4. Provar que $\sqrt{3}$ é irracional.

Problema 5. Chamemos uma fração decimal $0, a_1a_2a_3\ldots$ *periódica* se existem números naturais n e $p \geq 1$ tais que $a_k = a_{k+p}$ para todos $k > n$.
a) Provar que quando transformamos um número racional na fração decimal, esta fração é periódica.
b) Provar que se uma fração decimal é periódica, ela representa um número racional.

Problema 6. Provar o teorema de Pitágoras e o teorema inverso, a saber

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2 \Rightarrow \angle ABC = 90^o.$$

Problema 7. Dado triângulo ABC.
a) Provar que as três medianas de ABC interceptam-se num ponto.
b) Provar que as três bissetrizes de ABC interceptam-se num ponto.
c) Provar que os três mediatrizes dos lados de ABC interceptam-se num ponto.
d) Provar que as três alturas de ABC interceptam-se num ponto.

Problema 8. Duas cordas AB e CD de um círculo cruzam num ponto M dentro de círculo.
a) Provar que o ângulo AMC é igual a metade da soma dos arcos AC e BD em graus.
b) Provar que $|AM| \cdot |BM| = |CM| \cdot |DM|$.

Problema 9. Provar que $x^2 + px + q \geq 0$ para todos $x \in \mathbb{R}$ se e somente se $p^2 - 4q \leq 0$.

Todos problemas desta prova são teoremas importantes, quais é possível e útil ensinar na escola. Todos eles são partes valorizadas da cultura humana, cuidosamente passados duma geração para outra. Cada tem várias provas diferentes, o que também é sinal de importância.

Paul Erdös, matemático húngaro, gostou de dizer que na oficina de Deus há um livro onde todas melhores provas matemáticas são escritas. Quando encontrou uma prova linda, disse *"Esta prova é do Livro"*. Seguinte esta ideia, Aigner e Ziegler, matemáticos alemãos, escreveram um livro chamado *"Provas do Livro"* [1]. Regretamente, eles não incluem vãrias provas importantes (por exemplo que $\sqrt{2}$ é irracional), quais parecem demais simples para eles, mas as vezes são desconhecidas para nossos alunos. Atitude de Erdös mostra um destaque de mente dos matemáticos, quais valorizam provas lindas acima de tudo. Matemática sem provas é o mesmo que churrasco sem carne, mas esta pseudo-matemática é muito ensinada em todo mundo incluindo o Brasil nos níveis escolar e graduação. Só na pos-graduação começa matemática verdadeira.

Mas isto não é inevitavel! Seguinte teoria de Jean Piaget, famoso psicologo suiço, mente de crianças desenvolve em estagios e a maioria de crianças nos paises desenvolvidos alcança o nível de operações formais - o último nível na teoria dele - em volta de 12 anos mais ou menos dois anos. Esta idade - 12 anos - parece o tempo mais apropriado para começar introduzir argumetos rigorosos nas programas escolares. Isto é necessario para matemáticos e cientistas futuros e desejavel para todos.

Mas voltamos para nossa prova especial. Os resultados foram miseraveis. A maioria grande dos alunos não consegui nada e recebeu quase zero, só um pouco pontos de consolação. Isto não foi culpa dos alunos: eles sempre cumpriram suas tarefas e receberam notas boas. Ninguem disse-los que eles faltam alguma coisa.

Tenho impressão que as todas escolas brasileiras, publicas e privadas igualmente, não usam nenhuma oportunidade para ensinar seua alunos provas rigorosas. Mas o mesmo é verdade e das universidades! Alguns livros didáticos são escritos tal que usar eles para estudar argumentos lógicos é praticamente impossivel.

Mas voltamos para nossa prova especial. Discutimos o primeiro problema:

Problema 1. Provar que um número natural é múltiplo de 9 se e somente se a soma dos seus algarizmos (em notação decimal) é múltiplo de 9.

O fato mesmo é conhecido para cada aluno brasileiro, mas como provar-lo, não sabe quase ninguem.

No livro didático de Giovanni e.a. para 5-a série [9, pp. 95-96] este fato é só anunciado e illustrado com dois exemplos sem nenhuma tentativa explicar, por que este fato é verdadeiro. O mesmo é verdadeiro no livro didático de Maria Teresa e outros [12].

Vale a pena comparar estes dois livros. Podemos observar que eles são muito parecidos. Então, se uma escola usa ambos livros, na 5-a série os alunos vão estudar o mesmo que na 4-a. Esta confusão é o resultado de negligência do governo, cujas recomendações são tanto vagas que é impossivel dizer, o que deve ser ensinado em cada série.

Também, podemos observar abundância de tópicos e tratamento superficial de cada. Isto é especialmente visível no livro de Giovanni e.a. Este livro trata de 53 tópicos para estudar em um ano! Isto é conectado com situação de incerteza criada por irresponsabilidade do governo qual não publica nenhum curriculo. Logo os autores, para segurança, incluem tanto muito assuntos como possivel. É claro que nesta situação profundidade de estudos é impossivel. Então a maneira superficial, naquela criterios de divisibilidade são tratados neste livro, não é excepção mas sim uma regra. Nos Estados Unidos superficialidade de tratamento ja está criticada e chamada *"milha de largura, polegada de profundidade"*. É tempo usar a mesma frase no Brasil.

Mas voltamos para o criterio de divisibilide por 9. É claro que importância prática deste fato é praticamente zero. Se uma vez na sua vida você precisará saber se um número é múltiplo de 9 ou não, podera usar calculadora.

A única razão estudar este fato na escola é mostrar para os alunos o que pode ser argumentação matemática. Depois de várias demonstrações, os alunos podem construir seu próprios argumentos. Isto é feito nos vários paises incluindo Rússia.

Veja como este fato é explicado num livro didático russo:

ARITMETICA, 5-A SÉRIE, 2002

Autores:

Nikolsky, Potapov, Reshetnikov, Shevkin.

DIVISIBILIDADE POR 9, P. 128-129.

Se a soma de algarismos dum número é um múltiplo de 9, logo este número é um múltiplo de 9.

Por exemplo, tomemos o número 7245. A soma de seus algarismos é $7+2+4+5=18$, o que é múltiplo de 9. Logo o número 7245 é múltiplo de 9, pois pode ser apresentado como a soma

$$7 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 =$$
$$7 \cdot (999+1) + 2 \cdot (99+1) + 4 \cdot (0+1) + 5 =$$
$$(7 \cdot 999 + 2 \cdot 99 + 4 \cdot 9) + (7+2+4+5).$$

Na última linha há dois parenteses. A soma no primeiro parentese é múltiplo de 9. A soma no segundo parentese é a soma dos algarismos do nosso número, qual também é um múltiplo de 9.

Outro exemplo. O número 375 não é múltiplo de 9, pois a soma dos seus algarismos $3+7+5=15$ não é múltiplo de 9. Isto pode ser provado assim:

$$375 = 3 \cdot (99+1) + 7 \cdot (9+1) + 5 =$$
$$(3 \cdot 99 + 7 \cdot 9) + (3+7+5),$$

onde a soma no primeiro parentese é um múltiplo de 9, mas a soma no segundo parentese, isto é a soma dos algarismos do número 375, não é múltiplo de 9.

Veja outra explicação num outro livro didático russo:

MATEMÁTICA, 6-A SÉRIE, 2003, p. 13-14.

Autores: **Vilenkin, Jokhov, Chesnokov, Shvartsburd.**

CRITERIOS DE DIVISIBILIDADE POR 9.

Vamos descobrir, se for possivel colocar 846 ôvos em 9 cestas igualemente, sem quebrar ovos e sem dividir este número por 9.

O número 846 contem 8 centenas, 4 duzenas e 6 unidades. Se colocar uma centena de ôvos em 9 cestas igualmente, podemos colocar 11 ôvos em cada cesta e um ôvo resta. Logo, de oito centenas, 8 ôvos deixara.

Se colocar uma dezena de ôvos em 9 cestas igualmente, cada cesta recebera um ôvo e um ôvo restara fora de cestas. De quatro dezenas, restarão 4 ôvos.

Então, fora de cestas deixam 8 ôvos restante de centenas, 4 ôvos restante de dezenas e 6 ôvos mais: $8+4+6=18$. O número 18 é a soma de algarismos do número 846. Pois 18 ôvos podem ser colocados em 9 cestas igualmente (2 ôvos em cada cesta), os todos 846 ôvos podem ser colocadas em 9 cestas igualmente. Então, o número 846 é um múltiplo de 9.

Se a soma de algarismos dum número é um múltiplo de 9, logo o mesmo número é um múltiplo de 9.

Se a soma de algarismos dum número não é um múltiplo de 9, logo o mesmo número não é um múltiplo de 9.

Ambos textos russos sugerem uma ideia frutífera, a saber

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n} = \underbrace{9\ldots9}_{n} + 1 \quad \text{para todo} \quad n.$$

É verdade que estes textos apresentam só casos particulares, mas isto é apropriado nesta idade dos alunos. Vários anos depois alunos curiosos podem generalizar estes exemplos até obter a regra geral.

Agora falamos do problema 3 da prova especial:

Problema 3. Provar que o conjunto dos números primos é infinito.

Este teorema ja foi conhecido por Euclides. Aigner e Ziegler comecam seu livro ótimo [1] com seis provas diferentes deste teorema. Eles começam com prova do mesmo Euclides, qual caiba em sete linhas. O que é mesmo mais importante para nosso assunto, a prova de Euclides é tanto clara que pode ser explicada para crianças. Usamos esta oportunidade para introduizir o livro, qual jogou um papel inportantissimo no ensino russo de matemática.

Andrei Petrovich Kiselev [1852 - 1940] - patriarca do ensino matemático russo, o autor de vários livros didaticos em matemática, muito usados na Rússia. Vamos olhar, como Kiselev trata deste teorema. Ele escreve nas p.67-68:

É facil reconhecer que há um conjunto infinito de números primos. Realmente, admitimos o oposto, i.e. que o conjunto de números primos é finito. Neste caso existe o maior número primo. Denotamos-lo de a. *Para refutar nossa suponha, consideramos um outro número* N *definido como*

$$N = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot a) + 1.$$

Em outras palavras, obtemos N *por meio de multiplicar todos números primos e ampliar o resultado por 1. É claro que* N *é maior que* a, *logo* N *é composto. Mas cada número composto tem um fator primo (§93, teorema 1). Logo* N *é o multiplo dum número da lista* $2, 3, 5, 7, \ldots, a$. *Mas isto é impossivel, pois* N *é a soma de dois termos, daqueles o primeiro* $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot a)$ *é multiplo de cada número da lista* $2, 3, 5, 7, \ldots, a$, *mas o segundo* (1) *não é multiplo de nenhum deles. Então o maior número primo não existe, logo a seqüência dos números primos é infinita.*

Agora vamos falar do problema 5 da prova especial.

Problema 5. Chamemos uma fração decimal $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ *periódica* se existem números naturais n e $p \geq 1$ tais que $a_k = a_{k+p}$ para todos $k > n$.
a) Provar que quando transformamos um número racional na fração decimal, esta fração é periódica.
b) Provar que se uma fração decimal é periódica, ela representa um número racional.

Este teorema também é explicado em vários livros incluindo "Aritmetica" de Kiselev. Ele escreve na p. 137, §180: **A fração decimal infinita, obtida duma fração comum, deve ser periódica.** Vamos considerar um exemplo. Queremos transformar a fração 19/7 em fração decimal. Pois o denominador 7 não é produto de fatores 2 e 5 e esta fração não é simplificavel, ela não pode tornar-se numa fração decimal finita. Logo ela torna-se numa fração decimal infinita. Começamos o processo de divisão para obter vários primeiros algarismos:

```
19 |  7
 50  2,71428571...
  10
   30
    20
     60
      40
       50
        10
         3
```

Pois a divisão nao pode acabar, obtemos uma seqüência infinita de restos. Mas os restos são sempre menor que o divisor, logo tomam valores no conjunto finito $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Isto implica que se continuar o processo de divisão, alguns restos devem coincidir.

Realmente, o setimo resto é o mesmo que o primeiro. Mas tanto logo que um resto é mesmo que anterior, apos de escrever zero no lado dele, obtemos um número mesmo um anterior, logo o proximo resto sera o mesmo que um anterior. Então os restos se repetem periodicamente, logo os algarismos da fração decimal também se repetem periodicamente.

Agora falamos do último problema da prova especial:

Problema 9. Provar que $x^2+px+q \geq 0$ para todos $x \in \mathbb{R}$ se e somente se $p^2 - 4q \leq 0$.

Por que eu inclui este problema nesta prova especial? Vou explicar. Todos assuntos, quais nós, professores de universidades, ensinam para nossos alunos, são baseadas nos assuntos escolares como casa no fundamento. Se o fundamento é fraco, a toda casa vai cair. Eu ja escrevi disto em [16]. No ensino e na orientação todo o tempo lamentamos da negligência das escolas (publicas e privadas igualmente) onde meus alunos estudaram, não, não estudaram, mas sim, perderam tempo. A mesma situação acontece na graduação - perda enorme de tempo. A situação com trinômio quadrático é típica neste respeito.

Vários anos atrás eu ensinei estatística incluindo coefficiente de correlação e decidi **provar** que o seu modulo nunca excede 1:

$$|\rho(X,Y)| \leq 1$$

para todas variáveis aleatórias X,Y para quais ele existe. Eu segui o jeito bem conhecido, explicado no livro de Meyer [13, p. 169-170]. Seguinte a definição,

$$\rho(X,Y) = \frac{covar(X,Y)}{\sqrt{var(X) \cdot var(Y)}},$$

logo precisamos provar que

$$\Big(covar(X,Y) \Big)^2 \leq var(X) \cdot var(Y).$$

Lembramos que variância de cada variável aleatória é sempre não-negativa. Logo

$$var(tX - Y) \geq 0$$

para todos valores do parâmetro real t.

Lembramos que variância duma variável aleatória é sua covariância com ela mesma. Logo

$$covar(tX - Y,\ tX - Y) \geq 0$$

para todos t. Usando propriedades lineares de covariância, obtemos para todos t

$$var(X) \cdot t^2 - 2covar(X, Y) \cdot t + var(Y) \geq 0.$$

Isto é trinómio quadrático. Ja sabemos (eu disse para meus alunos) que trinómio quadrático é sempre não-negativo se e somente se o discriminante dele é nao-positivo, a saber

$$4\left(covar(X, Y)\right)^2 - 4var(X) \cdot var(Y) \leq 0,$$

o que é equivalente a

$$|covar(X, Y)| \leq \sqrt{var(X) \cdot var(Y)},$$

exatamente o que queremos provar.

Eu fui satisfeito, mas meus alunos não. Falando com eles eu descobri que eles nunca foram ensinados teoria de trinómio quadrático na maneira lógica, so decoram formulas de raizes.

O que autor dum livro didático universitario pode fazer? Pode tentar explicar, como Meyer [13]. Ou pode não explicar nada, como Bussab e Morettin [5]. Na 5-a edição do seu livro "Estatística básica", na p. 86 eles escrevem:

> Não é dificil provar que o coeficiente de correlação satisfaz
>
> $$-1 \leq corr(X, Y) \leq 1.$$

Esta evasão de raciocinio não é accidente, mas sim o todo estilo deste livro orientado para alunos quais não podem ou não querem entender provas.

Vamos **provar** *que* $x^2 + px + q \geq 0$ *para todos* $x \in \mathbb{R}$ *se e somente se* $p^2 - 4q \leq 0$.

Demonstração numa direção. Seja $p^2 - 4q \leq 0$. Provemos que

$$x^2 + px + q \geq 0 \quad \text{para todos} \quad x.$$

Transformamos o nosso trinómio assim:

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + (4q - p^2)/4.$$

Pois $p^2 - 4q \leq 0$, logo $(4q - p^2)/4 \geq 0$. Logo esta expressão é sempre positiva.

Demonstração noutra direção. Seja $p^2 - 4q > 0$. Tomemos $x = -p/2$ e obtemos um valor negativo de nosso trinómio.

É claro que estas provas curtas não esgotam a teoria do trinómio quadrático. Uma teoria bastante detalhada pode ser encontrada no livro didático de Larichev. O Brasil não é único pais onde estudo de trinómio quadrático está faltando nas escolas. Nos Estados Unidos há mesma falta. Meu amigo e colega Gregory Galperin escreveu para mim logo depois começar ensinar nos EUA:

> *Estou muito surpresado que todos alunos americanos tem experiencia de fatorizar trinómios quadráticos, mas não entendem que os números em parenteses são raizes do trinómio e não suspeitam o que são a soma e o produto de raizes.*

Os alunos dissem ao Galperin que ele ensinou-los matemática russa. Na realidade não existe matemática russa ou americana; existe matemática e pseudo-matemática.

Até agora eu argumentei que estudar provas rigorosas na escola é útil para matemáticos futuros. Na realidade é útil para todos alunos de ciências exatas. Vou apresentar uma experiência feita nos Estados Unidos, qual confirma isso.

Preparação escolar em matemática
$\Downarrow$
successo em ciências na universidade

Autores: Philip M. Sadler, Harvard - Smithsonian Center for Astrophysics e Robert H. Tai de Virginia.

Estes pesquisadores comparavam estudos na escola de vários mil alunos em quatro disciplinas cientificas (matemática, fisica, quimica, biologia) e descobrem que estudar na escola qualquer disciplin predita melhor desempenho só na mesma disciplina na universidade,mas não outras.

Mas há uma **excepção importante:** alunos com a mais rigorosa preparação escolar em matemática mostram desempenho significamente melhor na universidade em toda ciência incluida na pesquisa.

Conclusões:

Que estudar uma ciência na escola melhora desempenho da mesma ciência na universidade não é nenhuma surpresa.

Que estudar uma ciência na escola não melhora desempenho em outras ciências na universidade também não é grande descobrimento.

Mas o terceiro descobrimento é importante, a saber que a matemática é uma exepção: estudos rigorosos da matemática na escola melhoram desempenho em qualquer ciência na universidade.

Podemos adivinhar que o mesmo é verdadeiro para todas ciências exatas incluindo estatística.

Até agora eu argumentei que estudar provas rigorosas na escola é útil para alunos de ciências exatas. Na realidade é útil para todos alunos, incluindo ciências humanas e medicina. Pelo menos seguinte pensamento japones.

Demonstrações matemáticas no vestibular japones

Em 1993 "*Mathematical Association of America*" publicou uma coletânea de problemas de vestibular em várias universidades do Japão. Apresentamos alguns deles.

Problema 1.
Hokkaido Universidade, Humanidades, 1991.

Seja n um número natural mais que 2. Use indução matemática para provar a desigualdade

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2.$$

Problema 2.
Shiga Universidade, Escola da Medicina, 1991.

a) Dado $a^2 \geq b$, onde a, b são números naturais, provar que a condição necessária e suficiente para

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}$$

ser um número natural é existência dum número natural n tal que

$$n^2<a\leq 2n^2 \quad \text{e} \quad b=4n^2(a-n^2).$$

b) Encontrar todos valores de número natural b tais que

$$\sqrt{30+\sqrt{b}}+\sqrt{30-\sqrt{b}}$$

seja um número natural.

Então, seguinte pensamento japones os futuros especialistas em ciências humanas devem poder usar indução matemática e futuros medicos devem ter experiência de provas matemáticas.

Olhando nestes problemas, não estou surpresado que o senador americano Byrd disse no 9 de junho de 1997:

> *Sr. Presidente, nos últimos dez anos fui todo o tempo surpresado por falha de nossa Nacão produzir melhores alunos apesar de preocupação da publica e apesar de bilhões de dolares federais gastados cada ano para vários programas desenhados para ajudar e meliorar educação. ...Especialmente em matemática, onde nossas crianças devem ser especialmente espertos, os Estados Unidos recebem o 28-o lugar em desempenho médio em matemática seguinte o estudo de alunos da 8-a série publicado em 1996. O Japão recebeu o terceiro lugar [6].*

O estudo, daquele o senador Byrd falou, é chamado TIMSS e seus resultdos são acessiveis no internete. Alguns deles foi incluidos no meu artigo [17].

Eu queria saber o que politicos brasileiros pensam do ensino no Brasil e conclui que eles não pensam nada dele. Cuidar do ensino é parecido de plantar um arvore de frutas - o resultado vai aparecer só muitos anos depois, mas politicos precisem resultados rapidos para dizer: Isto é meu merecimento.

É claro que salarios dos professores da escola são miseraveis e precisem augmentação. Mas no mesmo tempo é necessario esclarecer seus deveres. Em outras palavras o governo deve publicar parâmetros curricilares par cada série com listas de problemas, quais alunos de cada série devem poder resolver.

Até agora eu argumentei que estudo de provas rigorosas é útil para alunos de universidades. Na realidade é útil para todos, incluindo politicos. Pelo menos seguinte Abraham Lincoln, o famoso presidente dos EUA, quem acabou com a escravidão. Ele escreveu na sua autobiografia (onde ele se-chama na terceira pessoa):

> *Ele estudou e quase completou os seis livros de Euclides desde tornar-se um membro do Congresso. Ele começou um curso de disciplina mental rigida com intenção ameliorar suas poderes, especialmente seu domínio de lógica e linguagem. Daqui é sua admiração de Euclides, cual ele trazeu com ele para todos lugares até conseguir demonstrar facilemente todas proposições destes seis livros; freqüentemente estudando a noite cerrada com uma vela perto do seu travesseiro, quando seus colegas, meia-duzia no quarto, encheu o ar com ronco interminável.*

Na Rússia ja está publicado livro - coletanea de problemas - piadas politicas [8]. Isto é uma delas (p. 15):

> *O senado russo inclue 178 senadores. Cada senador é ou honesto, ou corrupto. Sabemos que:*
> *1) Há pelo menos um senador honesto.*
> *2) Entre cada dois denadores pelo menos um é corrupto.*
> *Quanto senadores homestos há no senado russo?*

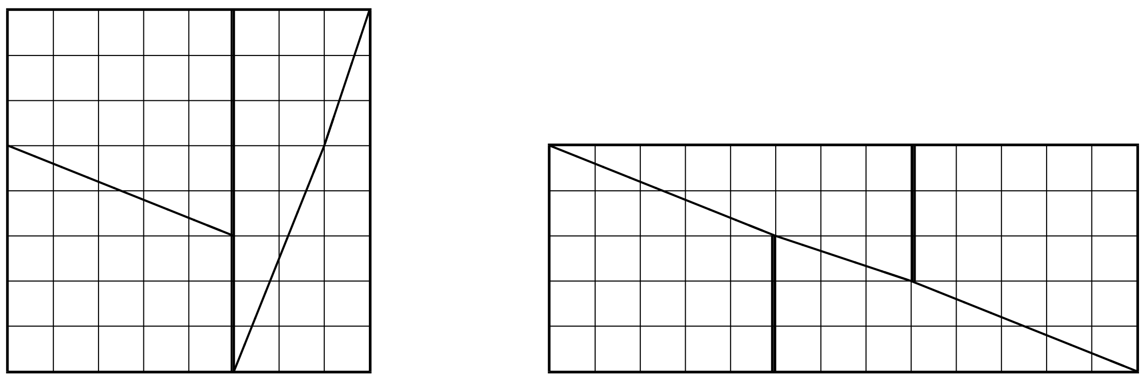
No final do livro Gik escreve:

> *A resposta pode chocar o leitor. Mas podemos esperar que a segunda condição na realidade não é exatamente correta.*

Mas como fazer alunos entender demonstrações, não somente decorar-los? Um jeito útil é apresentar “provas” falsas e pedir descobrir, onde é engano. O exemplo seguinte é muito bem conhecido.

Teorema.
Todos números são iguais.

Demonstração. Olha o desenho.



As mesmas quatro figuras geometricas, dois trapézios e dois triângulos, colocadas numa maneirs formam quadrado com area $8\times 8 = 64$ e colocadas noutra maneira formam retângulo com area $5 \times 13 = 65$. Logo

$$64 = 65.$$

Ja temos um descobrimento científico importantissimo. Mas podemos obter mais. Subtraindo 64 de ambos lados, obtemos $0 = 1$ o que é mesmo mais interessante. Multiplicando isto por qualquer X e qualquer Y, obtemos $0 = X$ e $0 = Y$. Daqui pela transitividade

$$X = Y$$

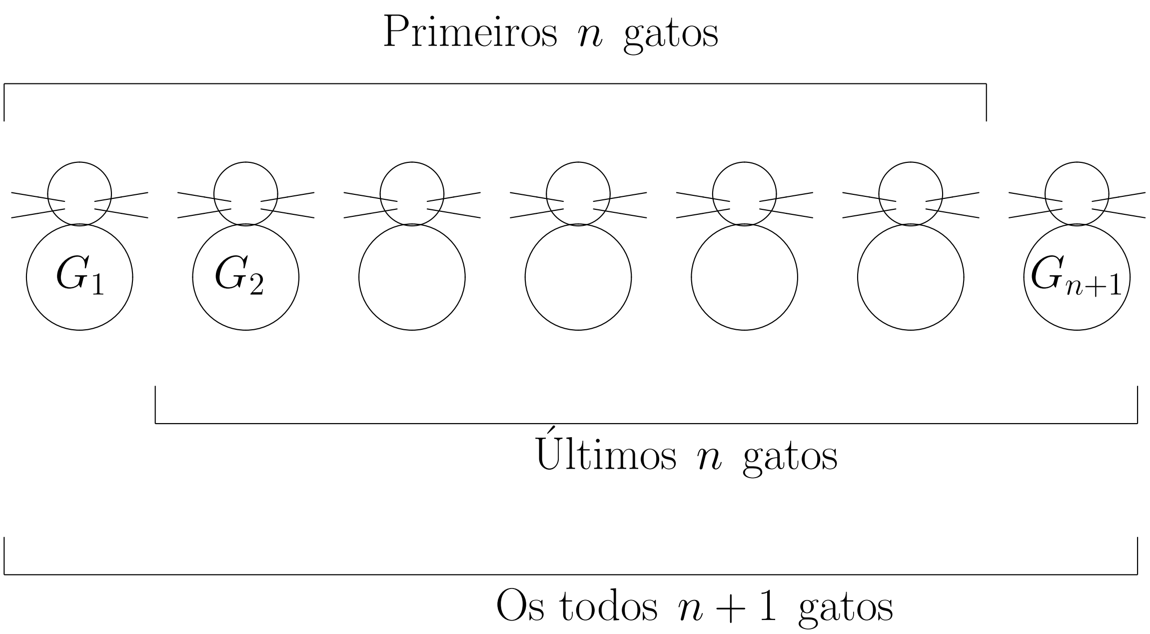
para qualqueres números X e Y.

Teorema.
Todos gatos no mundo têm a mesma côr.

Provemos pela indução matemática para cada n natural que todos n gatos (se eles existem) têm a mesma côr.

Base de indução: o caso $n = 1$. É evidente que cada gato tem a mesma côr que ele mesmo.

Passo de indução. Suponhamos que a nossa afirmação é verdadeira para todos n gatos e provemos que ela é verdadeira para $n+1$ gatos. Tomemos qualqueres $n+1$ gatos e denotamos-los de $G_1, \ldots, G_{n+1}$.



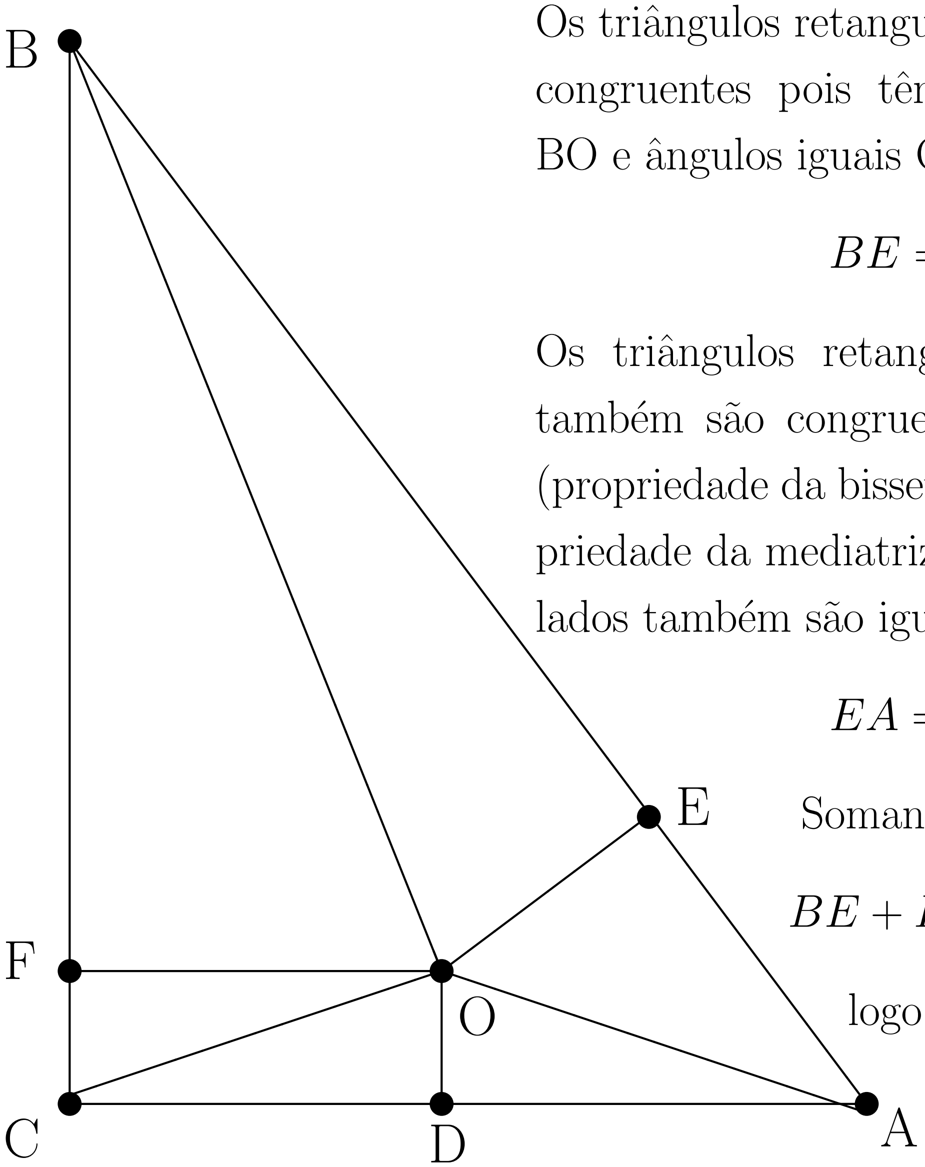
Seguinte suponha de indução, os primeiros n gatos têm a mesma côr. Logo G_1 e G_2 têm a mesma côr. Aplicando a suponha de indução para os últimos n gatos, obtemos que G_2 e G_{n+1} também têm a mesma côr. Então pela transitividade G_1 e G_{n+1} têm a mesma côr. Logo os todos $n+1$ gatos têm a mesma côr. O passo indução está acabado.

O nosso teorema está provado. Você concorda?

Erros em argumentos matemáticos.
Bradis, Minkovsky, Kharcheva.
Moscou, "Prosveschenie", 1967. 3-a edição.

P. 133: **Em cada triângulo retangular um cateto e hipotenusa têm comprimentos iguais.**

"Demonstração": Tomemos qualquer triângulo ABC com ângulo reto C e provemos que BA = BC. Desenhamos a bissetriz do ângulo B e a mediatriz do lado AC e denotamos de O o ponto onde esta bissetriz e esta mediatriz se cruzam. Baixamos de ponto O perpendicular OD no lado AC, perpendicular OE no lado BC e perpendicular OF no lado AB.



Os triângulos retangulares BOE e BOF são congruentes pois têm hipotenusa comum BO e ângulos iguais OBE e OBF. Logo

$$BE = BF.$$

Os triângulos retangulares OEA e OFC também são congruentes, pois OE = OF (propriedade da bissetriz) e OA = OC (propriedade da mediatriz). Logo seus terceiros lados também são iguais:

$$EA = FC.$$

Somando-los, obtemos

$$BE + EA = BF + FC,$$

logo $\quad BA = BC.$

Círculos Matemáticos na Rússia

Como eu tornei-se matemático? Posso responder com certeza: num círculo matemático. Vou explicar com detalhos. Tive um bom professor de matemática na escola. Quando eu fui na 8-a série, ele me avisou assistir um círculo matemática. Eu fui no vestibulo do predio velho da Universidade de Moscou e encontrei na parede horários de vários círculos matemáticos para alunos das 7, 8, 9, 10 séries (nesta epoca a escola tive 10 séries) com nomes de professores - alunos do departamento de matemática. Eu visitei vários círculos e escolhi qual eu gostei mais. Não foi nenhum registro, nenhum pagamento e nenhum exame. Cada aluno da série 8 tinha oportunidade asistir qualquer círculo para série 8. Muitos problemas apropriados para usar nos círculos matemáticos são coletados no livro [7]. A maioria de professores ensinaram solução de problemas de estilo de olimpiadas, mas um deles, chamado Alexander Olevsky, foi entusiasmado de analise matemática e isto eu gostei muito. Nestas aulas eu entendi muito claro de que eu gosto de fazer: provas no estilo de epsilon-delta.

Vários anos depois ensinei um círculo matemático. A maioria de professores de círculos matemáticos na Russia (incluindo mim) não foram professores profissionais. Fomos alunos de universidades, entusiasmados e inspirados, mas pouco experientes. Aceitavamos e usavamos preparação dos nossos alunos como devido. Quase pensavamos que alunos nascem com cultura matemática, o que é completamente errado.

Eu comecei agradecer o ensino russo quando fui para Estados Unidos e tive que ensinar alunos com faltas horriveis de preparação.

Loucuras

Lidando com ensino matemático, é necessario evitar loucuras. Vou mencionar várias, chamando elas seguinte paises onde elas são mais comuns.

Loucura americana: Ignorância não é obstaculo para ensinar matemática (ou qualquer outra disciplina).

A fraquesa maior do ensino americano é ignorância de professores de matemática. Eu não quero diser que nos outros paises professores de escola são perfeitos. Quando fui aluno da Universidade de Moscou, nós, alunos envolvidos no ensino de círculos matemáticos e nas olimpiadas, riram-se à socapa sobre professores da escola, sobre sua rigidez e falta de destreza na solução de problemas de olimpiadas. Mas nós não podemos imaginar que um professor da escola seja ignorânte em básicos da matemática escolar. Na Rússia isto é impossivel.

Nos EUA tal ignorância é comum, talvez pois ninguem sabe o que são básicos de matemática escolar: não existe curriculo nacional nos EUA. Logo professores americanos não sabem, o que é necessario estudar.

Os lideres de ensino americano só viram cabeças de professores da escola sugerindo ensinar fractais, geometrias não-Euclideanas e metodos da estatística como t de Student e qui-quadrado - todo isto sem augmentar o nível muito baixo da sua espertiza.

Parece que no Brasil curriculo nacional também não existe. Não sei, contar parâmetros (muito confusados) [14, 15] ou não.

Seguinte minhas impressões, a maior preocupação dos lideres de ensino matemática nos EUA durante muitos anos foi não orientar estudos de professores, mas sim distrair atenção publica de sua ignorância. Alguns documentos produzidos nas últimas decadas são vagos e confuzados; porem, é possivel adivinhar ignorância dos professores se ler entre linhas.

Contudo, agora temos alguns declarações abertas sobre preparação fraca dos professores.

Exemplo: Em ano 1986 Patricia Clark Kenschaft [10]: visitou uma escola elementar e descobriu que *nenhum professor* sabia como calcular a area dum retângulo:

> *"Qual é a area dum retângulo com altura x e largura y ?" eu perguntei. ... "x mais y?" dissem dois simultaneamente. ... Logo todos cinquenta deles gritam juntos: "x mais y."*

Ainda que a maior preocupação de Kenschaft foi ensino de crianças negras, ela observou que professores foram igualmente ignorântes nas escolas onde a maioria de alunos foram brancos (p. 210):

> *Viajando entre ricos e pobres distritos do estado, observei que a competência matemática dos professores foi miseravel em ambos casos. Parece que os resultados mais altos de alunos nos distritos ricos são resultados não do melhor ensino nas escolas, mas sim da melhor influência dos pais.*

Loucura francesa: Todo ensino deve ser feito no nível maximal de generalidade sem atenção para conteudo concreto.

Exemplo: Um aluno em volta de oito anos de idade, qual recebeu notas boas, foi perguntado: "Quanto é dois mais três?" O garotinho, ensinado na maneira francesa, respondeu: "isto é mesmo que três mais dois, pois a adição é comutativa" [2, p. 4].

Outro exemplo: Stella Baruk no seu livro [3] observe que o primeiro exemplo de função apresentado para alunos franceses é função com dominio vazio, logo seu conjunto de valores é vazio e o grafico é vazio também.

Na França também foi feita uma experiência interessantissima.

No final dos anos 1970-79 o seguinte problema foi dado para 97 alunos das segunda e terceira séries das escolas franceses:

Problema. Há 26 ovelhas e 10 cabras num navio. Qual é a idade do capitão? [3, p. 25]

76 alunos (a maioria entre 97) apresentaram uma resposta numerica obtida fazendo alguma operação aritmetica com os números dados de ovelhas e cabras. Por exemplo, alguns somaram os dois números dados e responderam que o capitão tem 36 anos de idade. Analogos resultados foram obtidos em vários paises da Europa (França, Alemanha, Suiça, Polonia). Educadores destes paises são muito preoccupados com estes fatos. É claro que estes problemas não podem ser "resolvidos". A unica resposta razoavel é "não sei", mas crianças evitam diser "não sei" pois seguinte sua experiência, são reprovados se dizer "não sei".

References

[1] Martin Aigner e Günter M. Ziegler. Proofs from The Book. 3-a edição. Springer, 2004.

[2] Vladimir Arnold. A matematica é necessaria na escola? Moscou, 2004. (Em russo.)

[3] Stella Baruk. L'âge du capitaine. De l'erreur en mathêmatiques. Editions du Seuil, 1985. (En frances.)

[4] Bradis, Minkovsky, Kharcheva. Erros em argumentos matemáticos. 3-a edição. Moscou, 1967. (Em russo.)

[5] Wilton de O. Bussab e Pedro A. Morettin. Estatística Básica. 5-a edição. Editora Saraiva, 2002.

[6] O discurso do senador Byrd:
`http://www.intres.com/math/byrd.htm`

[7] Mathematical Circles (Russian Experience) by Dmitri Fomin, Sergey Genkin, and Ilia Itenberg. Translated from the Russian by Mark Saul. American Mathematical Society, 1996. (Em ingles.)

[8] Evgeny Gik. Quebra-cabeças politicas. Moscou, 2000. (Em russo.)

[9] Giovanni, Castrucci, Giovanni Jr. A Conquista da Matemática. Com projeto interdisciplinar. Quatro volumes para séries 5, 6, 7, 8. Editora FTD S. A., 2002.

[10] Patricia Clark Kenschaft. *Racial Equity Requires Teaching Elementary School Teachers More Mathematics.* Notices of AMS, February 2005, v. 52, n. 2, pp. 208-212.

[11] A. P. Kiselev. Aritmetica. Reformado por A. Ya. Khinchin. Moscou, 2002. (Em russo.)

[12] Maria Teresa, Maria do Carmo, Maria Elisabete, Armando Coelho. Marcha Criança. Matemática. Ensino fundamental, 4-a série. Editora Scipione, 2003.

[13] Paul L. Meyer. Probabilidade: Aplicações à Estatística. 2-a edição, Editora LTC, 1983.

[14] . Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. Volume 3. 2a edicao. Brasília, 2000.

[15] Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 5a a 8a série. Brasília, Secretaria de Educacao Fundamental 1998.

[16] Andre Toom. O efeito dominó. *Matemática Universitaria*, n. 30, june 2001, pp. 5-14.

[17] André Toom. Comparação do ensino de matemática no Brasil, Rússia e outros países. Texto preliminar do mini-curso laboratório ministrado no II Bienal da SBM na Universidade Federal da Bahia em 25-29 de outubro de 2004.