UFPE, 1o semestre de 2003.
Curso MES-942, "Métodos Matemáticos para Estatística".
Professor André Toom PROVA ESPECIAL.

Problema 1. Provar que um número natural é multiplo de 9 se e somente se a soma dos seus algarizmos (em notação decimal) é multiplo de 9. *10 pontos.*

Problema 2. Para quaisqueres numeros naturais M e N provar que

$$mmc(M,\ N) \times mdc(M,\ N) = M \times N,$$

onde $mmc(M,\ N)$ é o menor multiplo comum e $mdc(M,\ N)$ é o maior divisor comum deles. *10 pontos.*

Problema 3. Provar que o conjunto dos números primos é infinito. *10 pontos.*

Problema 4. Provar que $\sqrt{3}$ é irracional. *10 pontos.*

Problema 5. Chamemos uma fração decimal $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ *periodica* se existem números naturais n e $p \geq 1$ tais que $a_k = a_{k+p}$ para todos $k > n$.
a) Provar que quando transformamos um número racional na fração decimal, esta fração é periodica. *10 pontos.*
b) Provar que se uma fração decimal é periodica, ela representa um número racional. *10 pontos.*

Problema 6. Provar o teorema de Pitágoras e o teorema inverso, a saber

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2 \Rightarrow \angle ABC = 90^o. \textit{ 10 pontos.}$$

Problema 7. Dado triângulo ABC .
a) Provar que as três medianas de ABC interceptam-se num ponto. *10 pontos.*
b) Provar que as três bissetrizes de ABC interceptam-se num ponto. *10 pontos.*
c) Provar que os três mediatrizes dos lados de ABC interceptam-se num ponto. *10 pontos.*
d) Provar que as três alturas de ABC interceptam-se num ponto. *10 pontos.*

Problema 8. Duas cordas AB e CD de um círculo cruzam num ponto M dentro de circulo.
a) Provar que o ângulo AMC é igual a metade da soma dos arcos AC e BD em graus. *10 pontos.*
b) Provar que $|AM| \cdot |BM| = |CM| \cdot |DM|$. *10 pontos.*

Problema 9. Provar que $x^2 + px + q \geq 0$ para todos $x \in \mathbb{R}$ se e somente se $p^2 - 4q \leq 0$. *10 pontos.*